Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
Фізичний факультет
Кафедра вищої математики

Математичний аналіз

Приклади лекцій

Диференціювання функцій

Похідної функції $y = f(x)$ в крапці x називається **кінцева** межа

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \Leftrightarrow \qquad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Функція $y = f(x)$ називається **дифференцируемой** у крапці x, якщо її приріст допускає виділення лінійної головної частини, називаної **диференціалом** функції

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) \underset{\Delta x \to 0}{=} \underbrace{k\,\Delta x}_{\substack{\backslash\backslash \\ dy = df(x)}} + o(\Delta x)$$

Зауваження. У випадку найпростішої лінійної функції $y = kx$ її приріст і диференціал $\Delta y = dy = k\Delta x$ те саме (тому, диференціалом аргументу $dx = \Delta x$ називають його приріст). У загальному випадку, дифференцируемая функція локально майже линейна: її зміна майже пряма пропорційно $\Delta y \approx dy = k\,\Delta x$ зміні аргументу.

Між **похідній** і **диференціалом** функції є простий зв'язок

$$k = y' = f'(x) \qquad \Rightarrow \qquad dy = y'dx \qquad \Leftrightarrow \qquad df(x) = f'(x)dx$$

Теорема (правила диференціювання)

Нехай

1) $u = f(x), \quad v = g(x)$

$\Rightarrow$

1) $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$	$(u+v)' = u'+v'$	$d(u+v) = du+dv$
2) $(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$	$(u-v)' = u'-v'$	$d(u-v) = du-dv$
3) $(f(x)\times g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$	$(u\cdot v)' = u'\cdot v+u\cdot v'$	$d(u\cdot v) = du\cdot v+u\cdot dv$
4) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$	$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du\cdot v-u\cdot dv}{v^2}$
5) $f(g(x))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$	$u(v)' = u'(v)\cdot v'$	$du(v) = u'(v)dv$

Таблиця
похідних елементарних функцій

$(e^x)' = e^x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$	
$(\sin x)' = \cos x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\mathrm{tg}\ x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\mathrm{arc\,tg}\ x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\mathrm{ctg}\ x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\mathrm{arc\,ctg}\ x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Зауваження. Безпосередньо з визначення похідної випливають правила диференціювання, пов'язані з константами $\boldsymbol{c} = const$

$$\boldsymbol{c}' = 0, \qquad (\boldsymbol{c}\cdot f(x))' = \boldsymbol{c}\cdot f'(x)$$

Відзначимо деякі корисні при диференціюванні ради

- на постійний доданок “не обертаємо уваги” (похідна однаково $=0$)

$$\big(f(x)+c\big)' = \big(f(x)+\ \big)' = f'(x)$$

- постійний множник, не замислюючись, виносимо за знак похідної

$$\big(c\cdot f(x)\big)' = c\cdot f'(x)$$

- будь-який корінь перетворимо в ступінь із дробовим показником

$$\sqrt[n]{f(x)} = \big(\,f(x)\,\big)^{\frac{1}{n}}$$

- дріб з постійним чисельником перетворимо в ступінь знаменника з негативним показником

$$\frac{c}{f(x)} = c\cdot\big(f(x)\big)^{-1}$$

- до статечно-показовій функції застосовуємо перетворення “е в ступені логарифм”

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

- знаходження похідній і диференціала з формальної точки зору різняться тільки позначенням: похідна - $\{\,'\,\}$ після, диференціал - $\{\,\boldsymbol{d}\,\}$ перед функцією

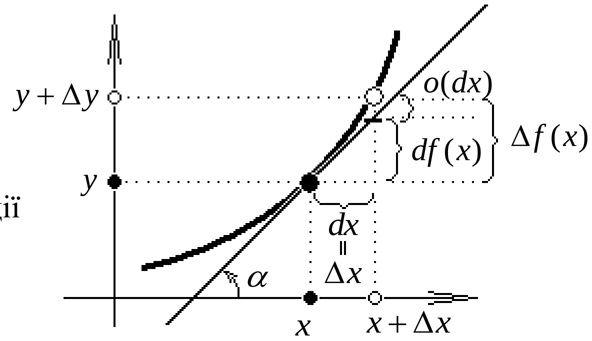
Фізичний зміст **похідної** – **швидкість** зміни функції в порівнянні з аргументом.

Геометричний зміст **похідної**

$$\boxed{f'(x) = k = \operatorname{tg}\alpha}$$

(тангенс кута між дотичною до графіка функції $f(x)$ в крапці x й віссю Ох).

Геометричний зміст **диференціала** – приріст уздовж дотичній.



Інтегрування функцій

Первісної функції $f(x)$ на інтервалі $(a,\, b)$ називається функція $F(x)$ така, що

$$F'(x) = f(x) \quad \text{або} \quad dF(x) = f(x)dx \qquad \forall x \in (a,\, b)$$

Невизначеним інтегралом називається сукупність усіх первісних

$$\int f(x)dx = F(x) + const$$

Знаходження інтеграла зводиться до відновлення первісної $F(x)$ по її похідній $f(x)$ або, що те ж саме, по її диференціалу $f(x)dx$, так що інтегрування є операцією зворотної диференціюванню

$$d\big(F(x)+c\big) = \cancel{d\int} f(x)dx = f(x)dx \qquad \Leftrightarrow \qquad \int f(x)dx = \cancel{\int d}\big(F(x)+c\big) = F(x)+c$$

Правила інтегрування випливають із відповідних правил диференціювання

Теорема (правила інтегрування)

Нехай

1) $u = f(x), \quad v = g(x)$

$\Rightarrow$

1) Лінійність

$$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx \qquad \int (\alpha u + \beta v)dx = \alpha \int u\,dx + \beta \int v\,dx$$

2) Інтегрування вроздріб

$$\int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int g(x)\cdot f'(x)dx \qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

3) Інтегрування підстановкою

$$\int f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)dx = \int f\big(g(x)\big)dg(x) = \Big[\, g(x) = y \,\Big] = \int f(y)dy \qquad \int u(v)\,v'dx = \int u(v)\,dv$$

Таблиця **диференціалів** | Таблиця **невизначених інтегралів**

$d\,e^x = e^x\,dx$		$\int e^x\,dx = e^x + c$
$d\ln\lvert x\rvert = \frac{1}{x}\,dx$		$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + c$
$d\,x^\alpha = \alpha\,x^{\alpha-1}\,dx$		$\int x^\beta\,dx = \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} + c$
$d\sin x = \cos x\,dx$		$\int \cos x\,dx = \sin x + c$
$d\cos x = -\sin x\,dx$		$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
$d\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$	$\Leftrightarrow$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \mathrm{tg}\,x + c$
$d\,\mathrm{ctg}\,x = -\frac{1}{\sin^2 x}\,dx$		$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\mathrm{ctg}\,x + c$
$d\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$		$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$
$d\,\mathrm{arctg}\,x = \frac{1}{1+x^2}\,dx$		$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \mathrm{arctg}\,x + c$
$d\ln\lvert x + \sqrt{x^2 \pm 1}\rvert = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}\,dx$		$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}\,dx = \ln\lvert x + \sqrt{x^2 \pm 1}\rvert + c$

Таблиця невизначених інтегралів по суті є таблицею диференціалів прочитаної навпаки “ праворуч-ліворуч”

Відзначимо деякі корисні при інтегруванні ради

- постійний множник, не замислюючись, виносимо за знак інтеграла

$$\int c\cdot f(x)dx = c\cdot\int f(x)dx$$

- інтеграл від суми функцій (як правило) розбиваємо в суму інтегралів

$$\int \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

- будь-який корінь перетворимо в ступінь із дробовим показником

$$\int \ldots \sqrt[n]{f(x)} \ldots dx = \int \ldots (f(x))^{\frac{1}{n}} \ldots dx$$

- якщо на диференціювання зручно дивитися як на своєрідну операцію “винесення” функції з-під знака диференціала d з перетворенням у свою похідну, то на операцію інтегрування, навпаки, “внесення” функції назад під знак диференціала d з відновленням у первісну. Відзначимо, що “виносити” або “вносити” ми вміємо тільки функції з нашої таблиці

$$dF(x) = \overset{f(x)}{d\ldots}\,x = f(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad \int f(x)dx = \int \ldots \overset{F(x)}{d}\; x = F(x)+c$$

- обоє основних методу інтегрування (“підстановкою” і “ вроздріб”) мають однаковий початок: необхідно “єдину” подынтегральную функцію розбити в добуток двох співмножників $f\cdot g'$, в одному з них довідатися (згадати рядок з таблиці невизначених інтегралів!) похідну g' деякої функції-первісної g, внести g' під знак диференціала d, перетворивши в g

$$\int f(\ldots)\cdot g'(x)\,\overset{g(x)}{d}\,x = \int f(\ldots)\,d\,g(x)$$

- якщо d функція, що $f(\ldots)$ залишився перед знаком диференціала, являє $g(x)$: $f(g(x))$ собою складну функцію від, то робимо заміну змінних (інтегрування “підстановкою”)

$$\boxed{\int f\left(g(x)\right)\cdot g'(x)dx = \int f\left(g(x)\right)d\,g(x) = \left[\; g(x) = y \;\right] = \int f(y)\,dy}$$

- якщо функції $f(x)$ й $g(x)$ ніяк не зв'язані між собою, то інтегруємо “ вроздріб”, сподіваючись, що нове вираження $g(x)\cdot f'(x)$ інтегрувати легше (наприклад, це функція з нашої таблиці)

$$\boxed{\int f(x)\cdot g'(x)dx = \int f(x)d\,g(x) = f(x)\cdot g(x) - \int g(x)\,d\,f(x) = f(x)\cdot g(x) - \int g(x)\cdot f'(x)dx}$$

Певний інтеграл

Нехай на кінцевому відрізку $\left[a,\, b\right]$ задана функція $f(x)$.

Розіб'ємо відрізок $\left[a,\, b\right]$ крапками ділення

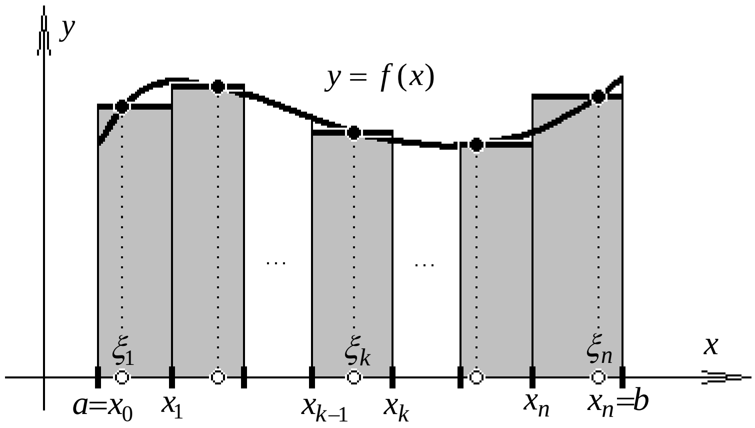
$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

на малі частини $\left[x_{k-1},\, x_k\right]$ довжиною $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

й позначимо через $d = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k$ діаметр розбивки.

Виберемо на кожній малій частині проміжну крапку $\xi_k \in \left[x_{k-1},\, x_k\right]$.

Складемо інтегральну суму $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$.



Певним інтегралом (інтегралом Римана) від функції $f(x)$ по відрізкові $\left[a,\, b\right]$ називається межа інтегральних сум, коли діаметр розбивки прагне до нуля

$$\boxed{\lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx}$$

якщо він існує, кінцевий і не залежить ні від способу розбивки, ні від вибору проміжних крапок.

Геометричний зміст: площа під кривою $y = f(x),\ \ x \in \left[a,\, b\right]$.

Фізичний зміст: шлях, пройдений зі швидкістю $v = f(t)$ за період часу $t \in \left[a,\, b\right]$

маса (заряд) стрижня $\left[a,\, b\right]$ з лінійною щільністю $\rho = f(x)$

Первісної (узагальненої) функції $f(x)$ на відрізку $\left[a,\, b\right]$ називається **безперервна** на $\left[a,\, b\right]$ функція $F(x)$ така, що $F'(x) = f(x)\ \ \forall x \in \left[a,\, b\right]$, крім, можливо, **кінцевого** набору крапок $a \le c_0 < \ldots < c_j < \ldots < c_m \le b$, у яких $F'(c_j) \ne f(c_j)$ або $\nexists$

Теорема (формула Ньютона-Лейбница)

Нехай

1) $\exists$ інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$

2) $\exists$ первісна $F(x)$

$\Rightarrow$

1) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Відзначимо правила інтегрування певних інтегралів, що випливають із формули Ньютона-Лейбница й відповідних правил для невизначених інтегралів

Лінійність

$$\boxed{\int_a^b \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx}$$

Інтегрування вроздріб

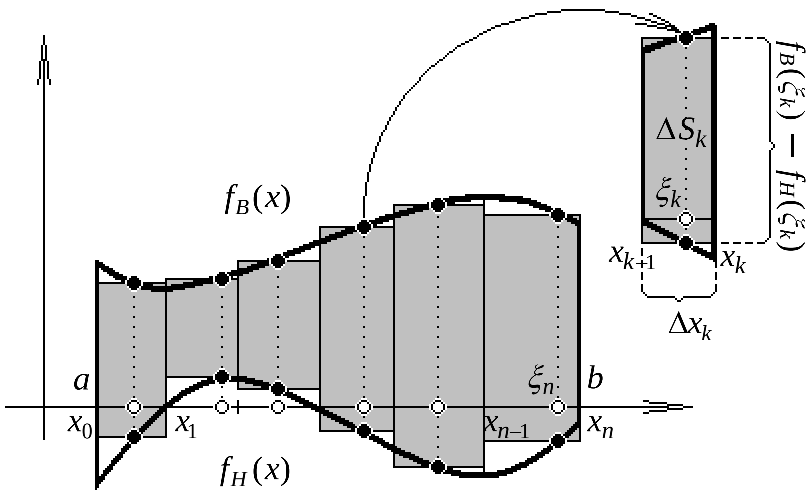
$$\boxed{\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,d\,g(x) = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\,d f(x) = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\cdot f'(x)\,dx}$$

Заміна змінної

$$\boxed{\int_a^b f\left(g(x)\right)\cdot g'(x)\,dx = \int_a^b f\left(g(x)\right) d\,g(x) = \left[\begin{array}{c} g(x) = y \\ a \xrightarrow{x} b \;\; \Rightarrow \;\; g(a) \xrightarrow{y} g(b) \end{array}\right] = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy}$$

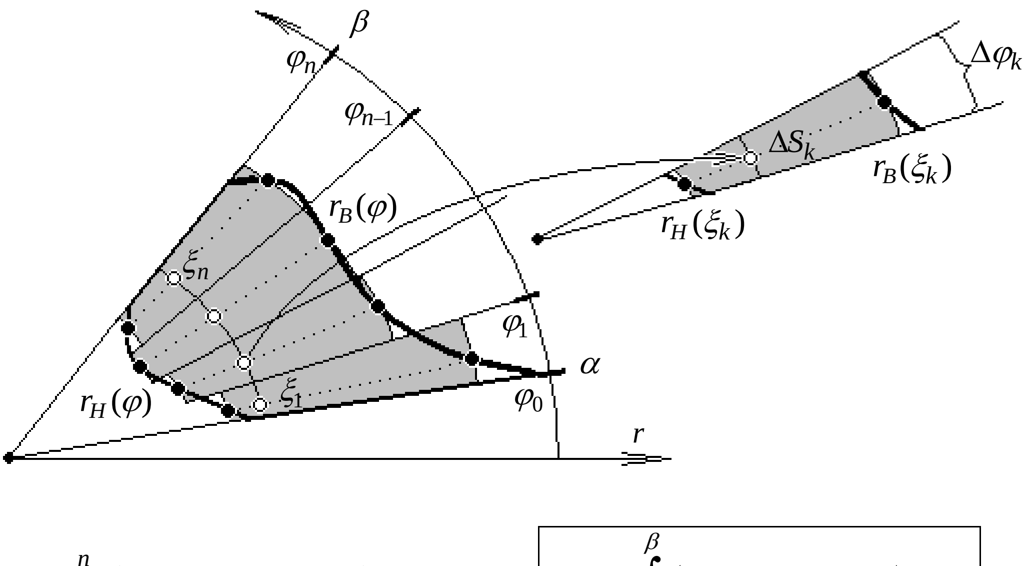
Площа фігури

Площа “криволінійного прямокутника”



$$S = \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k \approx \sum_{k=1}^{n} \Big(f_B(\xi_k) - f_H(\xi_k) \Big) \Delta x_k \quad \Rightarrow \quad \boxed{S = \int_a^b \Big(f_B(x) - f_H(x) \Big) dx}$$

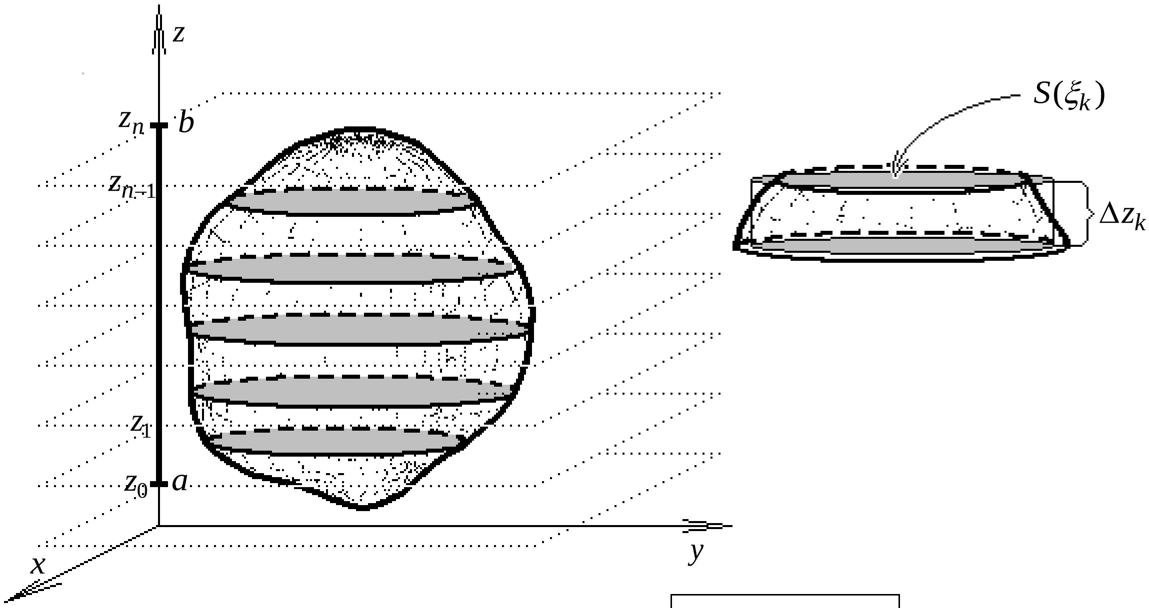
Площа “криволінійного сектору”



$$S = \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k \approx \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \Big({r_B}^2(\xi_k) - {r_H}^2(\xi_k) \Big) \Delta \varphi_k \quad \Rightarrow \quad \boxed{S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \Big({r_B}^2(\varphi) - {r_H}^2(\varphi) \Big) d\varphi}$$

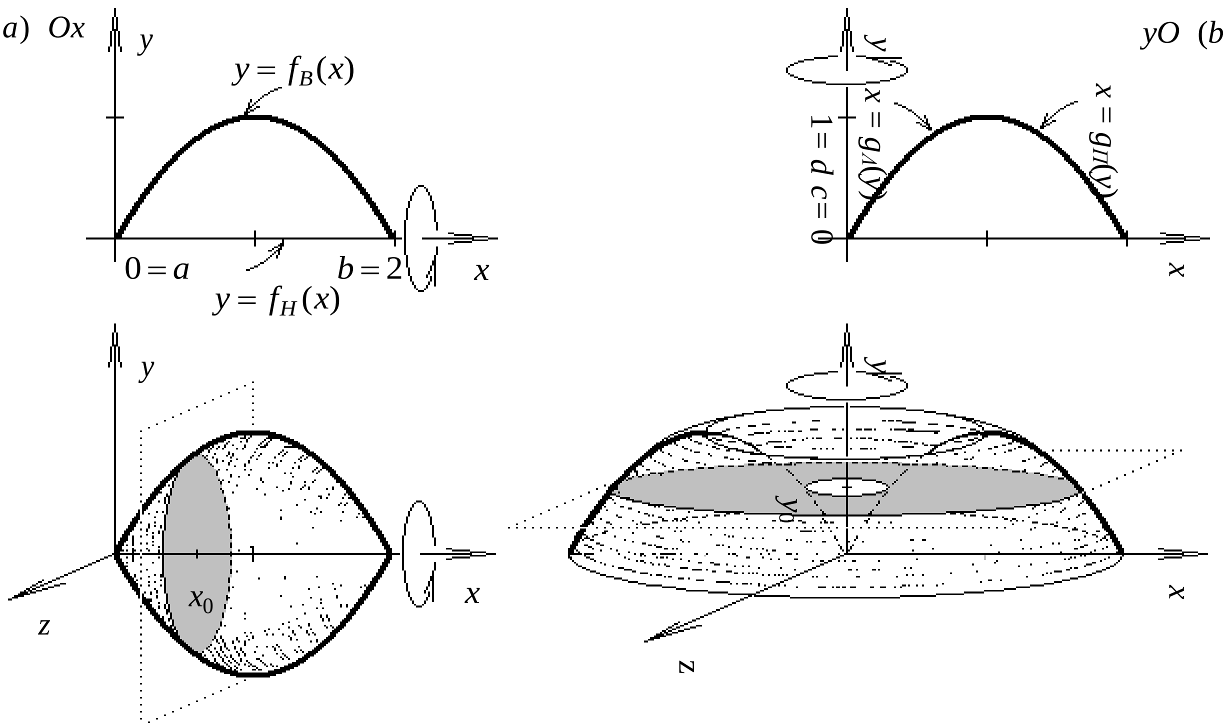
Об'єм тіла

Нехай тіло укладене між горизонтальними площинами $z = a$ й $z = b$. Якщо відома площа перетину $S(z)$ $(a \le z \le b)$ тіла горизонтальною площиною $z = const$, то об'єм може бути знайдений по формулі



$$V = \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k \approx \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta z_k \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = \int_a^b S(z)\,dz}$$

При знаходженні об'єму тіла обертання природно вибирати в якості січних площин перпендикулярні до осі обертання, у перетині яких може бути коло, кільце й т.п., що мають площу, що легко обчислюється.

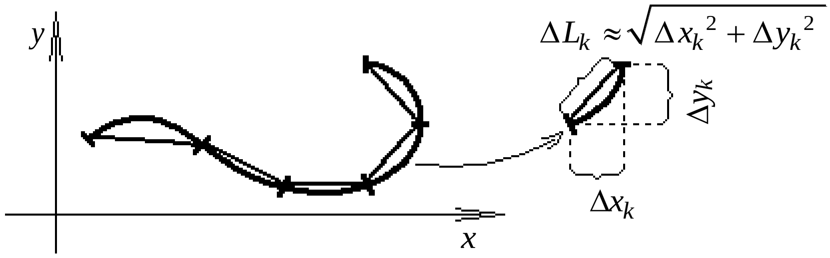


$$\boxed{V = \int_a^b S(x)\,dx = \pi\int_a^b \left(f_B^{\,2}(x) - f_H^{\,2}(x)\right)dx =} \qquad \boxed{\pi\int_c^d \left(g_П^{\,2}(y) - g_Л^{\,2}(y)\right)dy = \int_c^d S(y)\,dy = V}$$

Довжина й маса кривої

Нехай крива задана параметрически

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha, \beta]$$



Визначивши довжину кривій як граничне значення довжин ламаних, уписаних у криву, одержимо

$$L = \sum_{k=1}^{n} \Delta L_k \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x'^2(\xi_k) + y'^2(\xi_k)}\, \Delta t_k \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt}$$

Нехай крива задана явно

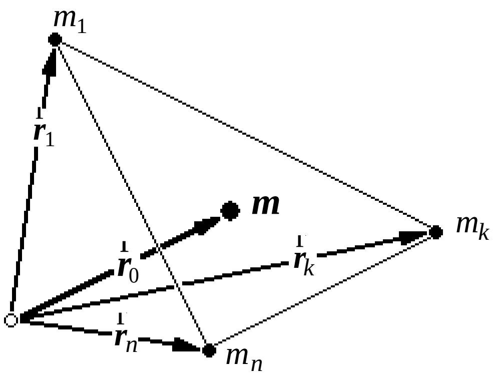
$$y = f(x), \quad x \in [a, b] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}, \quad x \in [a, b] \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx}$$

Нехай крива задана в полярних координатах

$$r = r(\varphi), \quad \varphi \in [\alpha, \beta] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [\alpha, \beta] \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(r(\varphi)\cos\varphi\right)'^2 + \left(r(\varphi)\sin\varphi\right)'^2}\, d\varphi = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, d\varphi}$$

Центр мас системи матеріальних крапок $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_k, \ldots, \vec{r}_n$ з масами $m_1, \ldots, m_k, \ldots, m_n$ визначається як крапка $\vec{r}_0$, у якій зосереджена вся маса, по формулі $m = \sum_{k=1}^{n} m_k$

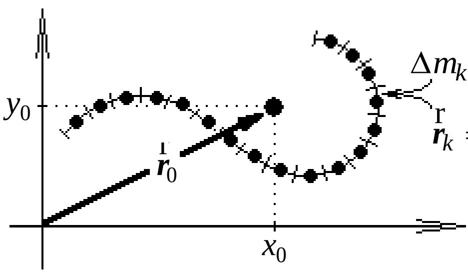


$$\vec{r}_0 = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k m_k \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x_0 = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} x_k m_k \\ y_0 = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} y_k m_k \end{array}\right.$$

Нехай дана однорідна крива (лінійна щільність $\rho = const$ постійна)

$$\left[\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right., \quad t \in [\,\alpha, \beta\,]$$

Розіб'ємо криву на досить малі дуги довжиною ΔL_k з масою $\Delta m_k = \rho\,\Delta L_k$, настільки малі, що кожну можна розглядати як матеріальну крапку.



$$\Delta m_k = \rho \Delta L_k \qquad \vec{r}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$$

Тоді

$$\left[\begin{array}{l} x_0 \approx \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} x_k \Delta m_k = \frac{1}{\rho L}\sum_{k=1}^{n} x_k \rho \Delta L_k \approx \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{n} x(\xi_k)\ \sqrt{x'^2(\xi_k) + y'^2(\xi_k)}\,\Delta t_k \\ y_0 \approx \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} y_k \Delta m_k = \frac{1}{\rho L}\sum_{k=1}^{n} y_k \rho \Delta L_k \approx \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{n} y(\xi_k)\ \sqrt{x'^2(\xi_k) + y'^2(\xi_k)}\,\Delta t_k \end{array}\right.$$

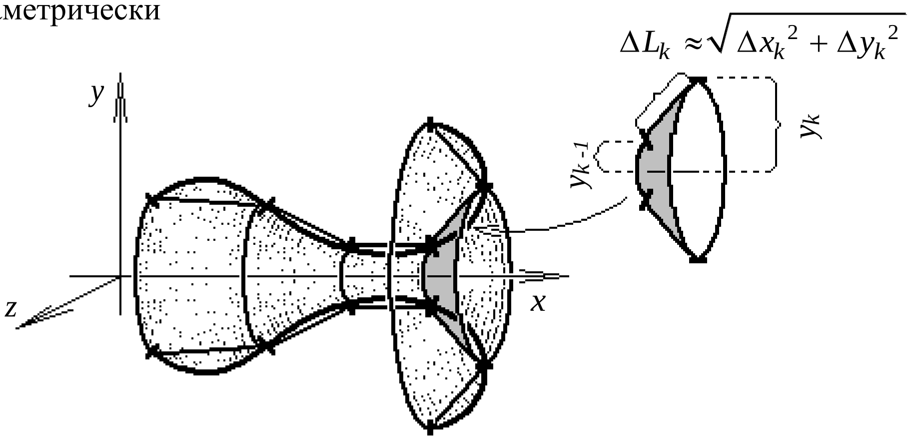
Звідси випливають “точні” формули

$$\boxed{\begin{array}{l} x_0 = \frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\beta} x(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt \\ y_0 = \frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt \end{array}, \qquad L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt}$$

Площа поверхні обертання

Нехай крива задана параметрически

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha, \beta]$$



і лежить по одну сторону від осі Ox: $y(t) \geq 0$ (або Oy: $x(t) \geq 0$)

Визначимо площу поверхні обертання навколо осі Ox (Oy) як граничне значення площ, утворених обертанням навколо осі ламаних, уписаних у криву. Враховуючи, що кожна ланка ламаної описує бічну поверхню усіченого конуса, одержимо

$$S = \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k \approx \sum_{k=1}^{n} \pi\left(y_{k-1} + y_k\right)\Delta L_k \approx 2\pi \sum_{k=1}^{n} y(\xi_k)\sqrt{x'^2(\xi_k) + y'^2(\xi_k)}\,\Delta t_k$$

так що

$$Ox: \ S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt \qquad Oy: \ S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$$

Нехай крива задана явно

$$y = f(x), \quad x \in [a, b] \ \Rightarrow \ \begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}, \quad x \in [a, b] \ \Rightarrow$$

$$Ox: \ S = 2\pi \int_{a}^{b} f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx \qquad Oy: \ S = 2\pi \int_{a}^{b} x\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$$

Нехай крива задана в полярних координатах

$$r = r(\varphi), \quad \varphi \in [\alpha, \beta] \ \Rightarrow \ \begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [\alpha, \beta] \ \Rightarrow$$

$$Ox: \ S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)\sin\varphi\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\,d\varphi \qquad Oy: \ S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)\cos\varphi\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\,d\varphi$$

Криволінійні інтеграли по довжині (маса, заряд)

Нехай дана **проста гладка** крива

$$L = \left\{ \vec{r} = \vec{r}(t) = \left[\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta] \\ z = z(t) \end{array} \right. \right\} \quad (\exists$$

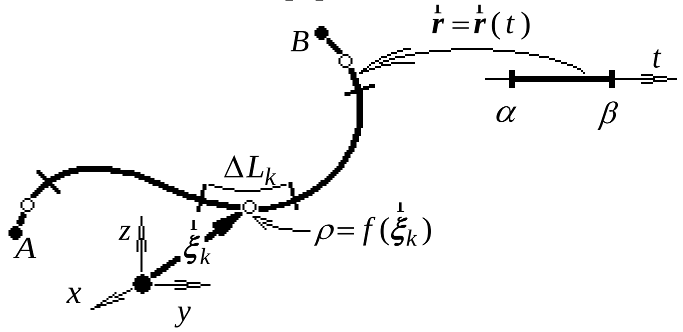
безперервна $\vec{r}_t{}'(t) \neq \vec{0}$)

на якій розподілена маса (заряд) із заданою лінійною безперервною щільністю

$\rho_{cp} = \dfrac{\Delta m}{\Delta L} \quad \Rightarrow \quad \rho = \lim\limits_{\Delta L \to \vec{r}} \rho_{cp} = f(\vec{r})$

Знайдемо масу (заряд) кривої.

Розіб'ємо криву на малі частини $L = \bigcup\limits_{k=1}^{n} L_k$ довжиною ΔL_k й виберемо на них проміжні крапки $\vec{\xi}_k \in L_k$.



Якщо діаметр розбивки досить малий, то щільність ρ протягом дуги L_k майже не змінюється $f(\vec{r}) \approx f(\vec{\xi}_k)$, так що маса рівна

$$m = \sum_{k=1}^{n} \Delta m_k = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\vec{\xi}_k) \Delta L_k = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta L_k$$

Отримана межа називається криволінійним інтегралом по довжині від скалярної функції $f(\vec{r})$ по кривій L, позначається

$$\int_L f(\vec{r})\, dL = \int_L f(x, y, z)\, dL$$

і зводиться до певного

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(\vec{r}) \left| \vec{r}_t{}' \right| \Bigg|_{\vec{r} = \vec{r}(t)} dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y, z) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \Bigg|_{\substack{x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t)}} dt}$$

При знаходженні центру мас неоднорідної кривій L з лінійною щільністю $\rho = \rho(\vec{r}) = \rho(x, y, z)$ й масою

$$m = \int_L \rho(\vec{r})\, dL = \int_L \rho(x, y, z)\, dL$$

скористаємося визначенням центру мас системи матеріальних крапок. Розіб'ємо криву L крапками на малі частини L_k, настільки малі, що кожну можна розглядати як матеріальну крапку $\vec{\xi}_k = (\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ з масою $\Delta m_k \approx \rho(\vec{\xi}_k)\Delta L_k = \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta L_k$. Тоді

$$\vec{r}_0 \approx \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} \vec{\xi}_k \,\Delta m_k \approx \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} \vec{\xi}_k\, \rho(\vec{\xi}_k)\Delta L_k \underset{d \to 0}{\rightarrow} \frac{1}{m}\int_L \vec{r}\rho(\vec{r})\, dL \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x_0 = \frac{1}{m}\int_L x\rho(x, y, z)\, dL \\ y_0 = \frac{1}{m}\int_L y\rho(x, y, z)\, dL \\ z_0 = \frac{1}{m}\int_L z\rho(x, y, z)\, dL \end{array}\right.$$

Криволінійні інтеграли по координатах (робота сили)

Нехай дана **проста гладка** крива

$$L=\left\{\vec r=\vec r(t)=\begin{bmatrix} x=x(t)\\ y=y(t),\quad t\in[\alpha,\beta]\\ z=z(t)\end{bmatrix}\right\}\qquad (\exists \text{ безперервна } \vec r_t{}'(t)\neq\vec 0)$$

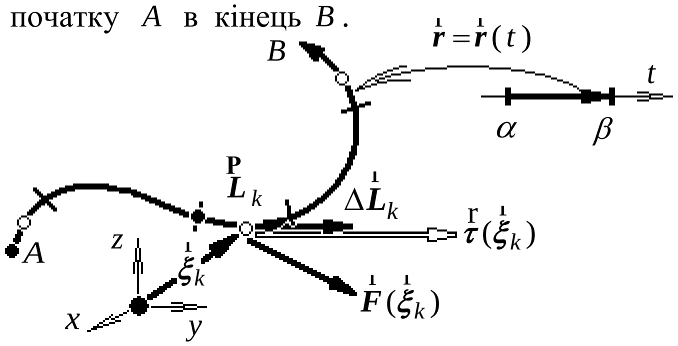
сприймана, як траєкторія руху матеріальної крапки. В окремому випадку, коли крива проста (без крапок самоперетинання), напрямок руху однозначно визначається вказівкою однієї з кінцевих крапок A або B в якості початку або кінця. Тому прості криві із заданою орієнтацією позначаються L_{AB} (або L_{BA}). Якщо додатково крива гладка, то напрямок руху можна задати, вибравши безперервне поле одиничних векторів дотичних

$$+\vec\tau(\vec r)=\vec\tau(\vec r(t))=\frac{\vec r\,'(t)}{|\vec r\,'(t)|}\qquad (\text{або } \;-\vec\tau(\vec r))$$

Знайдемо роботу безупинно мінливої уздовж кривої $L_{AB}\equiv L_+$ сили

$$\vec F(\vec r)=\begin{bmatrix} P(x,y,z)\\ Q(x,y,z)\\ R(x,y,z)\end{bmatrix}$$

при переміщенні матеріальної крапки з початку A в кінець B.



Розіб'ємо криву на малі частини $L_+=\bigcup_{k=1}^{n}\vec L_k$ довжиною ΔL_k й виберемо на них проміжні крапки $\vec\xi_k\in\vec L_k$.

Якщо діаметр розбивки досить малий, то сила $\vec F$ протягом дуги $\vec L_k$ майже не змінюється $\vec F(\vec r)\approx\vec F(\vec\xi_k)$,

а сама дуга $\vec L_k$ майже "не викривляється" $\vec\tau(\vec r)\approx\vec\tau(\vec\xi_k)$ і може бути замінена вектором дотичної $\Delta\vec L_k$ такої ж довжини (вектором орієнтованої довжини)

$$\vec L_k\approx\Delta\vec L_k=\vec\tau(\vec\xi_k)\cdot\Delta L_k=\begin{bmatrix}\cos\alpha_k\\ \cos\beta_k\\ \cos\gamma_k\end{bmatrix}\Delta L_k=\begin{bmatrix}\Delta L_{x_k}\\ \Delta L_{y_k}\\ \Delta L_{z_k}\end{bmatrix}$$

координати якого можна розглядати, як довжини проекцій орієнтованої дуги $\vec L_k$ на координатні осі $Ox,\ Oy,\ Oz$. Тоді робота рівна

$$A_{\vec F}=\sum_{k=1}^{n}\Delta A_k=\lim_{d\to0}\sum_{k=1}^{n}\left(\vec F(\vec\xi_k),\ \Delta\vec L_k\right)=\lim_{d\to0}\sum_{k=1}^{n}P(\xi_k,\ \eta_k,\ \zeta_k)\Delta L_{x_k}+Q(\ldots)\Delta L_{y_k}+R(\ldots)\Delta L_{z_k}$$

Отримана межа називається криволінійним інтегралом по координатах від вектор-функції $\vec{F}(\vec{r})$ по орієнтованої кривій $L_+ \equiv L_{AB}$ (збігаючись із інтегралом по довжині від скалярної функції $f = (\vec{F}, \vec{\tau})$), позначається

$$\int\limits_{L_{AB}} \left(\vec{F}(\vec{r}), d\vec{L}\right) = \int\limits_{L_{AB}} P(x, y, z)dx + Q(...)dy + R(...)dz$$

і зводиться до певного інтеграла

$$\boxed{\int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(\vec{F}(\vec{r}), \vec{r}_t{}'\right)\Big|_{\vec{r}=\vec{r}(t)} dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(x, y, z)\cdot x' + Q(...)\cdot y' + R(...)\cdot z'\Big|_{\substack{x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)}} dt}$$

Поверхневі інтеграли по площі (маса, заряд)

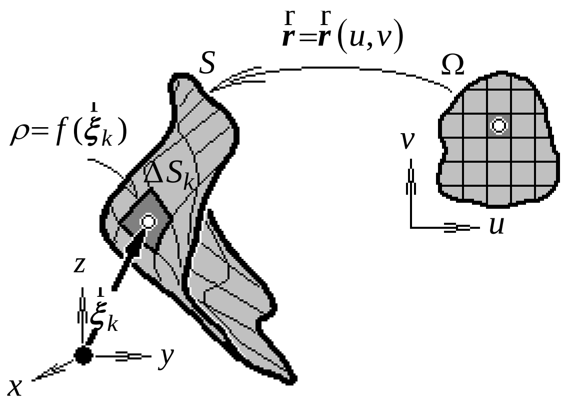
Нехай дана **проста гладка** поверхня

$$S = \left\{ \vec{r} = \vec{r}(u,\ v) = \begin{bmatrix} x = x(u,\ v) \\ y = y(u,\ v),\ (u,\ v) \in \Omega \\ z = z(u,\ v) \end{bmatrix} \right\} \quad (\exists\ \vec{r}_u{}',\ \vec{r}_v{}' \text{ - безперервні, } \left[\vec{r}_u{}',\ \vec{r}_v{}'\right] \neq \vec{0})$$

на якій розподілена маса (заряд) із заданою поверхневою безперервною щільністю

$$\rho_{cp} = \frac{\Delta m}{\Delta S} \quad \Rightarrow \quad \rho = \lim_{\Delta S \to \vec{r}} \rho_{cp} = f(\vec{r})$$

Знайдемо масу (заряд) поверхні.



Розіб'ємо поверхню на малі частини $S = \bigcup_{k=1}^{n} S_k$ площею ΔS_k й виберемо на них проміжні крапки $\vec{\xi}_k \in S_k$

Якщо діаметр розбивки досить малий, то щільність ρ протягом лунки S_k майже не змінюється $f(\vec{r}) \approx f(\vec{\xi}_k)$, так що маса рівна

$$m = \sum_{k=1}^{n} \Delta m_k = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\vec{\xi}_k) \Delta S_k = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\ \eta_k,\ \zeta_k) \Delta S_k$$

Отримана межа називається поверхневим інтегралом по площі від скалярної функції $f(\vec{r})$ по поверхні S, позначається

$$\iint_S f(\vec{r})\, dS = \iint_S f(x,\ y,\ z)\, dS$$

і зводиться до подвійного інтеграла

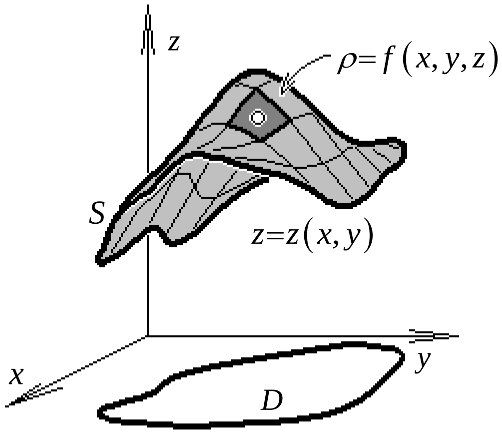
$$\boxed{\iint_\Omega f(\vec{r})\ \overset{\sqrt{(\vec{r}_u{}',\ \vec{r}_u{}')(\vec{r}_v{}',\ \vec{r}_v{}') - (\vec{r}_u{}',\ \vec{r}_v{}')^2}}{\overset{//}{\left|\left[\vec{r}_u{}',\ \vec{r}_v{}'\right]\right|}}\Bigg|_{\vec{r}=\vec{r}(u,v)} du\, dv = \iint_\Omega f(x,\ y,\ z) \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{vmatrix} \right|_{\substack{x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v)}} du\, dv}$$

В окремому випадку, коли поверхня

$$S = \left\{ z = z(x, y), \quad (x, y) \in D \right\}$$

графік безупинно дифференцируемой функції, інтеграл рівний

$$\boxed{\iint_S f(x, y, z)\,dS = \iint_D f(x, y, z)\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,\Big|_{z=z(x,y)} dx\,dy}$$



При знаходженні центру мас неоднорідної поверхні S з поверхневою щільністю $\rho = \rho(\mathbf{r}) = \rho(x, y, z)$ й масою

$$m = \iint_S \rho(\mathbf{r})\,dS = \iint_S \rho(x, y, z)\,dS$$

скористаємося визначенням центру мас системи матеріальних крапок. Розіб'ємо поверхню S кривими на малі частини, що S_k попарно не налягають, настільки малі, що кожну можна розглядати $\boldsymbol{\xi}_k = (\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ як матеріальну $\Delta m_k \approx \rho(\boldsymbol{\xi}_k)\Delta S_k = \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta S_k$ крапку з масою . Тоді

$$\mathbf{r}_0 \approx \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\xi}_k \Delta m_k \approx \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\xi}_k \rho(\boldsymbol{\xi}_k)\Delta S_k \underset{d\to 0}{\to} \frac{1}{m}\iint_S \mathbf{r}\rho(\mathbf{r})\,dS \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{m}\iint_S x\rho(x, y, z)\,dS \\ y_0 &= \frac{1}{m}\iint_S y\rho(x, y, z)\,dS \\ z_0 &= \frac{1}{m}\iint_S z\rho(x, y, z)\,dS \end{aligned} \right.$$

Поверхневі інтеграли по координатах (потік вектора)

Нехай задана **проста гладка** поверхня

$$S = \left\{ \vec{r} = \vec{r}(u,v) = \begin{bmatrix} x = x(u,\ v) \\ y = y(u,\ v), \quad (u,\ v) \in \Omega \\ z = z(u,\ v) \end{bmatrix} \right\} \quad (\exists\ \vec{r}_u',\ \vec{r}_v' \text{ - безперервні, } \left[\ \vec{r}_u',\ \vec{r}_v'\ \right] \neq \vec{0})$$

На ній можна вибрати два безперервні поля одиничних векторів нормалей

$$+\vec{n}(\vec{r}) = \vec{n}(\,\vec{r}(u,v)) = \frac{\left[\ \vec{r}_u',\ \vec{r}_v'\ \right]}{\left|\left[\ \vec{r}_u',\ \vec{r}_v'\ \right]\right|} \qquad (\text{або} \quad -\vec{n}(\vec{r}\,))$$

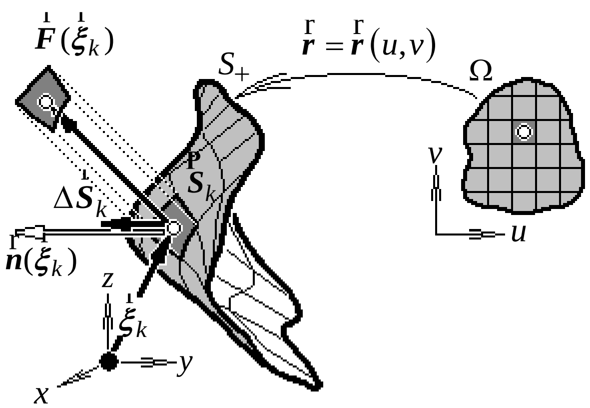
визначальних вибір сторони S_+ (або S_-) поверхні або, як говорять, **орієнтацію**.

Знайдемо потік безперервного векторного поля через дану сторону поверхні

$$\vec{F}(\vec{r}\,) = \begin{bmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{bmatrix}$$

Потік стаціонарного поля швидкостей $\vec{v}(\vec{r})$ рідини – це її об'єм, що протікає через відповідну сторону поверхні в одиницю часу.
Потік стаціонарного струму із щільністю $\vec{j}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}\,)\cdot\vec{v}(\vec{r}\,)$ - це сила струму, що рухаються зі швидкістю $\vec{v}(\vec{r}\,)$ й щільністю $\rho(\vec{r}\,)$ зарядів (або маса рідини, що протікає).

Розіб'ємо поверхню на малі частини $S_+ = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \vec{S}_k$ площею ΔS_k й виберемо на них проміжні крапки $\vec{\xi}_k \in \vec{S}_k$
Якщо діаметр розбивки досить малий, то швидкість $\vec{v}$ протягом лунки $\vec{S}_k$ майже не змінюється $\vec{F}(\vec{r}\,) \approx \vec{F}(\vec{\xi}_k)$,
а сама лунка $\vec{S}_k$ майже “не викривляється” $\vec{n}(\vec{r}) \approx \vec{n}(\vec{\xi}_k)$ і може бути замінена



відповідною дотичною площиною з такою ж площею ΔS_k, що рівносильне завданню так званого вектора орієнтованої площі

$$\vec{S}_k \approx \Delta\vec{S}_k = \vec{n}(\vec{\xi}_k)\cdot\Delta S_k = \begin{bmatrix} \cos\alpha_k \\ \cos\beta_k \\ \cos\gamma_k \end{bmatrix} \Delta S_k = \begin{bmatrix} \Delta S_{yz_k} \\ \Delta S_{zx_k} \\ \Delta S_{xy_k} \end{bmatrix}$$

координати якого можна розглядати, як площі проекцій орієнтованої лунки $\vec{S}_k \parallel Ox,\ \parallel Oy,\ \parallel Oz$ на координатні площини $yOz,\ zOx,\ xOy$. Тоді потік рівний

$$\Pi = \sum_{k=1}^{n} \Delta\Pi_k = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(\ \vec{F}(\vec{\xi}_k),\ \Delta\vec{S}_k\ \right) = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_{yz_k} + Q(\ldots)\Delta S_{zx_k} + R(\ldots)\Delta S_{xy_k}$$

Отримана межа називається поверхневим інтегралом по координатах від вектор-функції $\vec{F}(\vec{r})$ по орієнтованій поверхні S_+ (збігаючись із інтегралом по площі від скалярної функції $f = (\vec{F}, \vec{n})$), позначається

$$\iint_{S_+} (\vec{F}(\vec{r}), d\vec{S}) = \iint_{S_+} P(x,\ y,\ z)\,dy\,dz + Q(\ldots)\,dz\,dx + R(\ldots)\,dx\,dy$$

і зводиться до наступного подвійного

$$\boxed{\iint_{\Omega} (\vec{F}(\vec{r}), \vec{r}_u', \vec{r}_v')\Big|_{\vec{r}=\vec{r}(u,v)} du\,dv = \iint_{\Omega} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{vmatrix}_{\substack{x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v)}} du\,dv}$$

В окремому випадку, коли

$$S_+ = \{ z = z(x,\ y),\ (x,\ y) \in D \}$$

верхня сторона графіка безупинно дифференцируемой функції, інтеграл рівний

$$\boxed{\begin{aligned} &\iint_{S_+} P(x,\ y,\ z)dy\,dz + Q(\ldots)dz\,dx + R(\ldots)dx\,dy = \\ &= \iint_{D} \left(-P(x,\ y,\ z)\cdot z_x' - Q(\ldots)\cdot z_y' + R(\ldots)\right)\Big|_{z=z(x,y)} dx\,dy \end{aligned}}$$