

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
Фізичний факультет
Кафедра вищої математики

Математичний аналіз

Матеріали до практичних занять

1. Знайти межі

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 - 3x^2 + 5x - 3} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3(\arcsin x^2)}{(1 - \cos \sqrt{\arctg x^6})}$$
$$c) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos x - 1}{2 \sin x - \sqrt{3}} \quad d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+2} \right)^{(x+1)}$$

2. Знайти головну частину функції при $x \rightarrow \omega$, з'ясувати, чи є функція нескінченно малої (великий), визначити порядок малості (росту).

$$a) f(x) = \sin^2 x^3 (1 - \cos \sqrt{x^5}), \quad x \rightarrow 0$$

$$b) f(x) = \frac{x^6 - 1}{(x-1)^5}, \quad x \rightarrow 1$$

3. Знайти крапки розриву функції, визначити їхній характер і зобразити ескіз графіка в околиці цих крапок.

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1}$$

4. Знайти

$$a) y' = ?, \quad y = \ln^6 \sqrt{x} \cdot \operatorname{tg}^4 x$$

$$b) dy = ? \quad y = \ln^3(\cos(\operatorname{tg}^4 \sqrt[3]{3x})) \quad c) y^{(30)} = ? \quad y = \sqrt[4]{2x-1}$$

5. Знайти кут перетинання двох кривих

$$y = x^\alpha, \quad y = \sqrt[\alpha]{x} \quad (\alpha > 0)$$

6. Знайти межі

$$L) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$$

$$T) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}^{15} \left(\sqrt{x^5 + 1} + \sqrt{x^5 - 1} - 2\sqrt{x^5} \right)$$

7. Побудувати графіки функцій

$$a) y = \frac{x}{x^2 - 2x - 8}$$

$$b) r = a \cos 3\varphi$$

8. Представити комплексні числа в тригонометричній формі, знайти відповідні значення й зобразити геометрично:

$$a) z = 1 - i, \quad z^{25} = ?$$

$$b) z = -3 - i, \quad \sqrt[4]{z} = ?$$

9. Розкласти поліноми на найпростіші комплексні й речовинні множники.

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + 9x - 13$$

10. Знайти

$$\operatorname{ch}(-1 - 2i), \quad \cos(-1 - 2i)$$

11. Знайти

$$1. \int \frac{\sin \sqrt{x}}{(1 + \cos^2 \sqrt{x}) \sqrt{x}} dx$$

$$2. \int (-3x + 2) \cos 4x dx$$

$$3. \int \frac{x}{x^3 + 8} dx$$

$$4. \int \frac{dx}{\sin^2 x + \sin x \cos x - 6 \cos^2 x}$$

12. Знайти площу фігури, обмеженої кривими.

$$y = e^{3x}, y = e^6, \quad x = 0$$

13. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями.

$$z = \sqrt[4]{x^2 + y^2}, \quad z = 1$$

14. Знайти довжину кривої.

$$\begin{cases} x = a(t \sin t + \cos t) \\ y = a(t \cos t - \sin t) \end{cases}, \quad t \in [0, 4\pi]$$

15. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням кривій навколо осі.

$$r = a \cos \varphi \quad (\text{вісь } Oy).$$

16. З'ясувати збіжність невластного інтеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}^5}{x^6 + 1} dx$$

17. Знайти частки похідні й диференціал

$$z = x^3 \cdot \sqrt[5]{y^2} - \sqrt[7]{x} \cdot y^5$$

18. Знайти похідну функції в крапці A по напрямковій крапці B

$$u = \sin(x^4 y), \quad A(-1, \frac{\pi}{2}) \rightarrow B(0, \frac{3\pi}{2})$$

19. Знайти частки похідні складної функції

$$z = z(x, y), \quad \begin{cases} x = u^3 v^2, \\ y = \frac{u^2}{v^3} \end{cases}$$

20. Досліджувати на екстремум функцію $z = f(x, y)$

$$z = 2x^2 + 5y^2 - 2xy + 10x - 14y - 5$$