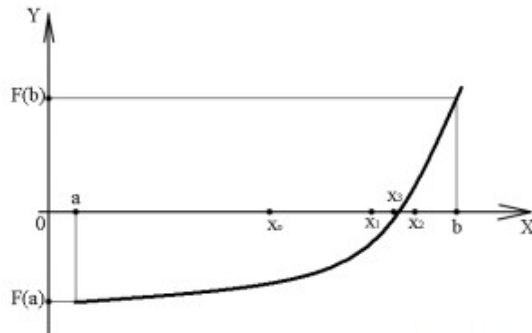


Завдання 1.

Ознайомиться з найпростішими методами розв'язання нелінійних рівнянь та розв'язати нелінійне рівняння з вашої предметної області (за вашим вибором) всіма способами (написати відповідну програму на мові Python). Порівняти результати.

Метод ділення відрізка навпіл.

Цей метод є одним з найбільш простих методів знаходження коріння нелінійних рівнянь. Цей метод полягає в наступному. Припустимо, що на відрізку $[a, b]$ розташований лише один корінь x рівняння, що розв'язується $F(x)=0$. Тоді значення функції в цих точках $F(a)$ і $F(b)$ мають різні знаки. Як початкове наближення до кореня рівняння візьмемо значення x_0 , відповідне



середині відрізка $[a, b]$, тобто

$$x_0 = \frac{1}{2}(a + b). \quad (*) \quad \text{Далі}$$

розглядаються значення $F(x)$ на кінцях отриманих відрізків $[a, x_0]$ та $[x_0, b]$, тобто $F(a)$, $F(x_0)$, $F(b)$. Той відрізок, на кінцях якого функція $F(x)$ набуває

значень різних знаків, має шуканий корінь, тому його приймають як новий відрізок. Другу половину відрізка $[a, b]$ на кінцях якого $F(x)$ не міняє знак, відкидають. В якості першої ітерації кореня приймають середину нового відрізка, після чого дії (*) повторюють знову. Т.ч. після кожної ітерації відрізок, на якому знаходиться корінь, зменшується в два рази, тобто після n ітерацій він зменшується в 2^n разів.

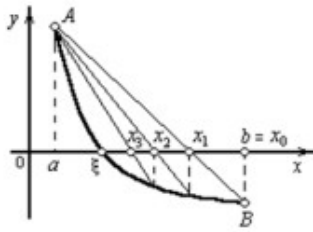
Ітераційний процес продовжується до тих пір, поки довжина знов отриманого інтервалу стане менше заданого числа $\varepsilon > 0$, а в якості кореня x_n приблизно приймається середина цього відрізка.

Відзначимо, що якщо на $[a, b]$ є декілька коріннів, то вказаний процес зійдеться до одного з коріннів, але заздалегідь не відомо до якого саме. У такому разі можна використовувати прийом виділення коріння: якщо корінь $x = x_n$, то розглядається функція:

$$G(x) = \frac{F(x)}{(x - x_n)^2},$$

і для неї повторюється процес знаходження кореня.

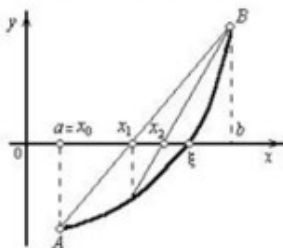
Метод знаходження хорд.



Якщо є добре початкове наближення x^* рівняння $F(x)=0$, тобто корінь відокремлений на відрізку $[a, b]$, то для уточнення значень кореня може бути застосований метод хорд. Кінці відрізка з'єднуються хордою і за наступне наближення набувають значень абсцис точки перетину хорди з віссю ox .

За початкове наближення x_0 вибирають той з кінців відрізка $[a, b]$, для якого виконується нерівність, $F(c) \cdot F'(c) < 0$, де $c=a$ або $c=b$.

Розглянемо приклад коли $y' > 0$, $y'' > 0$. З'єднаємо крапки A та B відрізком.



Точку перетину хорди AB з віссю ox позначимо x_1 . Проведемо через крапку x_1 пряму, паралельну oy , до перетину з графіком. Отримуємо крапку A_1 . Оскільки A_1 лежить нижче за вісь ox , то крапка a і x_1 лежать лівіше від ξ .

З'єднавши відрізком крапки A_1 та B , отримаємо послідовність $\{a, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ яка прагне до ξ . Аналітичний вираз для членів послідовності $\{x_n\}$ отримаємо з рівняння хорди AB :

$$\frac{y - F(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

Приймаючи $y=0$, $x=x_1$, отримаємо

$$x_1 = a - \frac{b - a}{F(b) - F(a)} F(a)$$

а при $y=0$, $x=x_2$ маємо

$$x_2 = x_1 - \frac{b - x_1}{F(b) - F(x_1)} F(x_1)$$

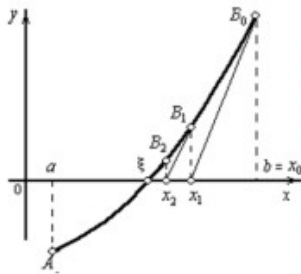
У загальному вигляді

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \bar{x}}{F(x_n) - F(\bar{x})} F(\bar{x})$$

Де $\bar{x}$ дорівнює тому з кінців відрізка, на якому виконується умова $F(c) \cdot F'(c) < 0$.

Ітераційний процес продовжується до тих пір, поки значення $F(x_n)$ або $|x_{n+1} - x_n|$ не стане менше заданої точності ϵ .

Метод Ньютона.



Відмінність цього методу від попереднього полягає в тому, що замість хорди проводиться дотична до кривої $y=F(x)$ через той кінець відрізка, на якому знак функції збігається із знаком другої похідної. Ця дотична перетинає вісь ox в крапці x_1 . На кривій знайдемо крапку B_1 , яка відповідає x_1 і проведемо до неї дотичну.

Отримаємо крапку x_2 і так далі. При цьому не обов'язково задавати відрізок $[a, b]$, який би містив корінь рівняння $F(x)=0$, а достатньо тільки знайти деяке початкове наближення кореня $x=x_0$.

Аналітичний вираз членів послідовності $\{x_n\}$ визначається рівнянням дотичної:

$$y - F(b) = F'(b) \cdot (x - b)$$

Полагаючи, що в неї $y=0$, а $x=x_1$ знайдемо

$$x_1 = b - \frac{F(b)}{F'(b)}$$

для x_2 :

$$x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)}{F'(x_1)},$$

.....

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$

При цьому необхідно, щоб $F(x_n)$ не дорівнювало нулю. Для завершення ітераційного процесу можна використовувати умову $|F(x_n)| < \varepsilon$, або умову двох послідовних наближень $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$.

Метод простої ітерації.

Цей метод застосовують для рівнянь, які можна записати у вигляді $x = \varphi(x)$, де $|\varphi'(x_n)| < 1$ на всьому проміжку $[a, b]$, де початкове рівняння має єдиний корінь.

Візьмемо на відріжку $[a, b]$ деяке число x_0 . Тепер побудуємо послідовність $x_1 = \varphi(x_0)$, $x_2 = \varphi(x_1)$, ..., $x_n = \varphi(x_{n-1})$, $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, ..., яка сходиться незалежно від вибору точки x_0 . Ітераційний процес зупиняють тоді, коли результати двох послідовних ітерацій мають близьке значення: $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$. Достатньою умовою збіжності методу простий ітерації є умова $|\varphi'(x_n)| < 1$.