Структура множества решений однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка

1 Основные определения

Линейным дифференциальным уравнением второго порядка называется

$$a_0(t)\ddot{x}(t) + a_1(t)\dot{x}(t) + a_2(t)x(t) = f(t), \qquad t \in (\alpha, \beta). \tag{1}$$

Здесь функции $a_0(t) \neq 0,\ a_1(t),\ a_2(t),\ f(t)$ непрерывны на интервале (α, β), а функция $x(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на интервале (α, β). Заданные функции $a_0(t) \neq 0,\ a_1(t),\ a_2(t)$ называются *коэффициентами* дифференциального уравнения, заданная функция $f(t)$ называется *правой частью* дифференциального уравнения, а искомая функция $x(t)$, которая удовлетворяет уравнению (1) при $t \in (\alpha, \beta)$, называется *решением дифференциального уравнения*. Если $f(t) \equiv 0$, то уравнение (1) называется *однородным*. В противном случае уравнение (1) называется *неоднородным*.

Для записи и изучения уравнения (1) удобно воспользоваться понятием дифференциального оператора. Дифференциальный оператор L переводит дважды непрерывно дифференцируемые на интервале (α, β) функции $x(t)$ в непрерывные на интервале (α, β) функции $L[x(t)]$ по формуле

$$L[x(t)] := a_0(t)\ddot{x}(t) + a_1(t)\dot{x}(t) + a_2(t)x(t).$$

С помощью оператора L дифференциальное уравнение (1) записывается в компактной форме

$$L[x(t)] = f(t). \tag{2}$$

Основным свойством оператора L является его линейность.

Лемма 1 *Для любых дважды непрерывно дифференцируемых на интервале (α, β) функций $x_1(t),\ x_2(t)$ и для любых вещественных констант $c_1,\ c_2$*

имеем

$$L[c_1x_1(t) + c_2x_2(t)] = c_1L[x_1(t)] + c_2L[x_2(t)]. \tag{3}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
&L[c_1x_1(t) + c_2x_2(t)] \\
&= a_0(t)\tfrac{d^2}{dt^2}[c_1x_1(t) + c_2x_2(t)] + a_1(t)\tfrac{d}{dt}[c_1x_1(t) + c_2x_2(t)] \\
&\qquad\qquad + a_2(t)[c_1x_1(t) + c_2x_2(t)] \\
&= c_1[a_0(t)\ddot{x}_1(t) + a_1(t)\dot{x}_1(t) + a_2(t)x_1(t)] \\
&\quad + c_2[a_0(t)\ddot{x}_2(t) + a_1(t)\dot{x}_2(t) + a_2(t)x_2(t)] = c_1L[x_1(t)] + c_2L[x_2(t)]. \qquad \square
\end{aligned}$$

2 Фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения

Определенные на интервале (α, β) функции $x_1(t), x_2(t)$ называются *линейно независимыми* на этом интервале, если

$$c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \equiv 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2 = 0.$$

Здесь $c_1,\ c_2$ - произвольные вещественные константы.

Определенные и дважды непрерывно дифференцируемые на интервале (α, β) функции $x_1(t), x_2(t)$ называются *фундаментальной системой решений* однородного линейного дифференциального уравнения

$$L[x(t)] = 0, \tag{4}$$

если:

1) функции $x_1(t), x_2(t)$ являются решениями уравнения (4);

2) функции $x_1(t), x_2(t)$ линейно независимы на интервале (α, β).

Теорема 1 *У однородного линейного дифференциального уравнения* (4) *существует фундаментальная система решений.*

Доказательство. Для однородного линейного дифференциального уравнения (4) рассмотрим две задачи Коши

$$\begin{cases} L[x(t)] = 0 \\ x(t_0) = 1 \\ \dot{x}(t_0) = 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} L[x(t)] = 0 \\ x(t_0) = 0 \\ \dot{x}(t_0) = 1 \end{cases}$$

Здесь t_0 - фиксированная точка из интервала (α, β).

У каждой из этих задач Коши существует единственное решение, определенное на всем интервале (α, β). Обозначим эти решения через $x_1(t)$ и $x_2(t)$ и покажем, что они образуют фундаментальную систему решений для однородного линейного дифференциального уравнения (4). Достаточно доказать, что функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ линейно независимы. Действительно, пусть некоторая линейная комбинация этих функций обратилась в тождественный нуль на всем интервале (α, β)

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \equiv 0.$$

Продифференцируем обе части последнего равенства по t. Получим

$$c_1 \dot{x}_1(t) + c_2 \dot{x}_2(t) \equiv 0.$$

Подставим в два последних равенства t_0 место t. Получим

$$\begin{cases} c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) = 0 \\ c_1 \dot{x}_1(t_0) + c_2 \dot{x}_2(t_0) = 0. \end{cases}$$

В силу определения функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$, имеем

$$\begin{cases} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0 \\ c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = 0. \end{cases}$$

Отсюда немедленно следует, что $c_1 = c_2 = 0$. $\square$

3 Формула Остроградского-Лиувилля.

Лемма 2 *Пусть функции* $a_{11}(t)$, $a_{12}(t)$, $a_{21}(t)$, $a_{22}(t)$ *непрерывно дифференцируемы на некотором интервале* $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$. *Тогда функциональный опре-*

делитель

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{vmatrix}$$

тоже непрерывно дифференцируем на интервале (α, β) *и его производная может быть найдена по формуле*

$$\Delta(t) = \Delta_1(t) + \Delta_2(t).$$

Здесь

$$\Delta_1(t) = \begin{vmatrix} \dot{a}_{11}(t) & \dot{a}_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2(t) = \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ \dot{a}_{21}(t) & \dot{a}_{22}(t) \end{vmatrix}.$$

Доказательство этой леммы очевидно.

Пусть функции $x_1(t),\ x_2(t)$ непрерывно дифференцируемы на интервале (α, β). Функциональный определитель

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix}$$

называется *определителем Вронского*, построенным по функциям $x_1(t),\ x_2(t)$.

Теорема 2 *Пусть функции* $x_1(t),\ x_2(t)$ *являются решениями однородного дифференциального уравнения*

$$a_0(t)\ddot{x}_i(t) + a_1(t)\dot{x}_i(t) + a_2(t)x_i(t) = 0, \qquad i = 1, 2, \qquad t \in (\alpha, \beta). \tag{5}$$

И пусть, далее,

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix}$$

обозначает соответствующий определитель Вронского.

Тогда имеет место следующая формула Остроградского-Лиувилля для определителя Вронского

$$W(t) = W(t_0) \cdot \exp\Big(-\int_{t_0}^{t} \frac{a_1(\xi)}{a_0(\xi)} d\xi\Big). \tag{6}$$

Доказательство. Продифференцируем определитель Вронского. Воспользовавшись леммой 2, получим

$$\dot W(t) = \begin{vmatrix} \dot x_1(t) & \dot x_2(t) \\ \dot x_1(t) & \dot x_2(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \ddot x_1(t) & \ddot x_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \ddot x_1(t) & \ddot x_2(t) \end{vmatrix}.$$

Из (5) следует, что

$$\ddot x_i(t) = -\frac{a_1(t)}{a_0(t)}\dot x_i(t) - \frac{a_2(t)}{a_0(t)}x_i(t), \qquad i = 1, 2.$$

Теперь для производной определителя Вронского имеем

$$\dot W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ -\frac{a_1(t)}{a_0(t)}\dot x_1(t) - \frac{a_2(t)}{a_0(t)}x_1(t) & -\frac{a_1(t)}{a_0(t)}\dot x_2(t) - \frac{a_2(t)}{a_0(t)}x_2(t) \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{a_1(t)}{a_0(t)}\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot x_1(t) & \dot x_2(t) \end{vmatrix} - \frac{a_2(t)}{a_0(t)}\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1(t) & x_2(t) \end{vmatrix} = -\frac{a_1(t)}{a_0(t)}W(t).$$

Таким образом, определитель Вронского удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\dot W(t) = -\frac{a_1(t)}{a_0(t)}W(t). \tag{7}$$

Легко видеть, что при любом фиксированном $t_0 \in (\alpha, \beta)$ функция

$$W_0(t) = \exp\Big(-\int_{t_0}^{t} \frac{a_1(\xi)}{a_0(\xi)}d\xi\Big)$$

удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению (7). Но тогда все решения уравнения (7) задаются формулой

$$W(t) = c \cdot \exp\Big(-\int_{t_0}^{t} \frac{a_1(\xi)}{a_0(\xi)}d\xi\Big), \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Подставим в эту формулу t_0 вместо t. Получим, что $c = W(t_0)$. Отсюда немедленно следует (6). □

Формула Остроградского-Лиувилля применяется в некоторых вопросах теоретической физики. В частности, она используется при доказательстве теоремы Пуанкаре о возвращениях.

Следствие 1 *Определитель Вронского либо тождественно равен нулю, либо не обращается в нуль ни в одной точке интервала* (α, β).

Доказательство немедленно следует из того факта, что второй сомножитель в правой части формулы (6) не обращается в нуль.

Следствие 2 *Пусть функции* $x_1(t)$ *и* $x_2(t)$ *являются решениями некоторого однородного линейного дифференциального уравнения*

$$L[x_i(t)] = 0, \quad i = 1, 2.$$

Функции $x_1(t)$ *и* $x_2(t)$ *линейно зависимы тогда и только тогда, когда построенный по ним определитель Вронского тождественно равен нулю.*

Доказательство. Пусть функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ линейно зависимы, т.е. существует нетривиальная линейная комбинация этих функций, которая обращается в тождественный нуль

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \equiv 0.$$

Продифференцировав по t, получим

$$c_1 \dot{x}_1(t) + c_2 \dot{x}_2(t) \equiv 0.$$

Подставим в два последних равенства фиксированное значение $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Получим

$$\begin{cases} c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) = 0 \\ c_1 \dot{x}_1(t_0) + c_2 \dot{x}_2(t_0) = 0 \end{cases}$$

У этой системы линейных алгебраических уравнений (относительно c_1 и c_2) существует нетривиальное решение. Но тогда ее определитель, который является определителем Вронского $W(t_0)$, равен нулю. По следствию 1 определитель Вронского тождественно равен нулю.

Пусть теперь определитель Вронского $W(t)$ тождественно равен нулю. Зафиксируем точку $t_0 \in (\alpha, \beta)$ и рассмотрим систему однородных линейных уравнений

$$\begin{cases} c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) = 0 \\ c_1 \dot{x}_1(t_0) + c_2 \dot{x}_2(t_0) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Определитель этой системы совпадает с определителем Вронского $W(t_0)$ и равен нулю. Следовательно, мы можем зафиксировать нетривиальное решение $c_1,\ c_2$ системы (8). Рассмотрим вспомогательную функцию

$$z(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t).$$

Она удовлетворяет однородному линейному дифференциальному уравнению

$$L[z(t)] = L[c_1x_1(t) + c_2x_2(t)] = c_1L[x_1(t)] + c_2L[x_2(t)] = 0$$

и, в силу (8), нулевым начальным условиям

$$z(t_0) = c_1x_1(t_0) + c_2x_2(t_0) = 0, \quad \dot{z}(t_0) = c_1\dot{x}_1(t_0) + c_2\dot{x}_2(t_0) = 0.$$

У такой задачи Коши существует только одно решение $z(t) \equiv 0$. Отсюда следует, что $c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \equiv 0$ т.е. $x_1(t)$ и $x_2(t)$ линейно зависимы. $\square$

4 Структура множества решений однородного линейного дифференциального уравнения

Теорема 3 *Пусть дано однородное линейное дифференциальное уравнение*

$$L[x(t)] = 0, \qquad t \in (\alpha, \beta) \tag{9}$$

и функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ образуют его фундаментальную систему решений.

Тогда все решения уравнения (9) описываются формулой

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t). \tag{10}$$

Здесь c_1 и c_2 являются произвольными вещественными константами.

Доказательство. Покажем, что при любых константах c_1 и c_2 формула (10) задает решение дифференциального уравнения (9). Действительно,

$$L[x(t)] = L[c_1x_1(t) + c_2x_2(t)] = c_1L[x_1(t)] + c_2L[x_2(t)] = 0.$$

Пусть теперь функция $x(t)$ является решением уравнения (9). Покажем, что она представима в виде (10). Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) = x(t_0) \\ c_1 \dot{x}_1(t_0) + c_2 \dot{x}_2(t_0) = \dot{x}(t_0). \end{cases} \qquad (11)$$

Определитель этой системы линейных уравнений не равен нулю, т.к. он является определителем Вронского, построенным по фундаментальной системе решений. Следовательно, у системы (11) существует единственное решение c_1 и c_2. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$z(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t).$$

Функции $z(t)$ и $x(t)$ удовлетворяют уравнению (9) и, в силу системы (11), одним и тем же начальным условиям в точке t_0. По теореме существования и единственности решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения $z(t) \equiv x(t)$. Следовательно, $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$. $\square$

Пример 1. Показать, что функции $x_1(t) = \cos\omega_0 t$ и $x_2(t) = \sin\omega_0 t$ образуют фундаментальную систему решений для уравнения

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

и записать все решения этого уравнения.

Непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что функции $x_1(t) = \cos\omega_0 t$ и $x_2(t) = \sin\omega_0 t$ удовлетворяют нашему уравнению. Докажем их линейную независимость. Пусть

$$c_1 \cos\omega_0 t + c_2 \sin\omega_0 t \equiv 0.$$

Продифференцировав по t, получим

$$-c_1 \sin\omega_0 t + c_2 \cos\omega_0 t \equiv 0.$$

Положим в двух последних равенствах $t = 0$. Получим $c_1 = c_2 = 0$. Таким образом, функции $x_1(t) = \cos\omega_0 t$ и $x_2(t) = \sin\omega_0 t$ образуют фундаментальную систему решений. Следовательно, все решения нашего уравнения имеют вид

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t.$$

Здесь c_1 и c_2 - произвольные вещественные константы.

Рассмотренное дифференциальное уравнение описывает гармонические колебания и имеет многочисленные применения в разных естественных науках.