Условные вероятности. Формула полной вероятности и формулы Байеса

1 Условные вероятности и независимость событий

Пусть дано вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P} \rangle$. И пусть зафиксированы события $A, B \in \mathcal{A}$, $\mathbf{P}(A) > 0$. *Условной вероятностью события B, при условии что произошло событие A, называется*

$$\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(AB)/\mathbf{P}(A).$$

Отсюда следует формула для вероятности одновременного наступления двух событий (*теорема умножения вероятностей*)

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A).$$

Таким образом, вероятность произведения двух событий равна произведению вероятностей одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место.

Теорема умножения вероятностей естественным образом переносится на случай *одновременного наступления нескольких событий*

$$P(A_1A_2A_3\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\ldots P(A_n/A_1A_2\ldots A_n).$$

События $A, B \in \mathcal{A}$ называются *независимыми* , если

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

Пример 1. *Брошено две игральные кости. Рассмотрим события*

$$\begin{aligned} A = &\ \{\textit{сумма выпавших очков не превосходит 5}\}, \\ B = &\ \{\textit{на одной кости выпало на одно очко больше, чем на другой}\}. \end{aligned}$$

Найти условную вероятность $\mathbf{P}(B/A)$.

Пространство элементарных событий

$$\begin{array}{cccccccccc} \Omega & = & \{ & (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) & \\ & & & (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) & \\ & & & (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) & \\ & & & (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) & \\ & & & (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) & \\ & & & (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) & \}. \end{array}$$

Имеем

$$\begin{aligned} A = & \quad \{(1,1),(2,1),(1,2),(3,1),(2,2),(1,3),(4,1),(3,2),(2,3),(1,4)\}, \\ B = & \quad \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(2,1),(3,2),(4,3),(5,4),(6,5)\}, \\ AB = & \quad \{(2,1),(1,2),(3,2),(2,3)\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{P}(B|A)) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\frac{\#AB}{\#\Omega}}{\frac{\#A}{\#\Omega}} = \frac{\#AB}{\#A} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}\ .$$

Пример 2. *Колода состоит из 36 карт. Из нее выбрали случайную карту. Доказать независимость событий*

$$A = \{\textit{Выбрали пику}\}, \qquad B = \{\ \textit{Выбрали даму}\}.$$

Ясно, что

$$AB = \{\ \text{Выбрали даму пик}\}.$$

Поэтому

$$\mathbf{P}(A)) = \frac{9}{36}, \quad \mathbf{P}(B)) = \frac{4}{36}, \quad \mathbf{P}(AB)) = \frac{1}{36} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

События A и B независимы.

Пример 3. *К экзамену подготовлено 25 билетов, из которых 5 являются счастливыми. Студенты берут билеты по очереди. Чему равна вероятность того, что первый студент взял счастливый билет? Что второй студент взял счастливый билет?*

Введем события

1с – первый студент взял счастливый билет,

1н – первый студент взял не счастливый билет,

2с – второй студент взял счастливый билет,

2н – второй студент взял не счастливый билет.

Рассмотрим пространство элементарных событий

$$\Omega = \{1с2с,\ 1с2н,\ 1н2с,\ 1н2н\}.$$

Найдем вероятности элементарных событий

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(1с2с) &= \mathbf{P}(1с)\mathbf{P}(2с|1с) = \frac{5}{25}\cdot\frac{4}{24}\ ,\\
\mathbf{P}(1с2н) &= \mathbf{P}(1с)\mathbf{P}(2н|1с) = \frac{5}{25}\cdot\frac{20}{24}\ ,\\
\mathbf{P}(1н2с) &= \mathbf{P}(1н)\mathbf{P}(2с|1н) = \frac{20}{25}\cdot\frac{5}{24}\ ,\\
\mathbf{P}(1н2н) &= \mathbf{P}(1н)\mathbf{P}(2н|1н) = \frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}\ .
\end{aligned}$$

Теперь имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(1с) &= \mathbf{P}(1с2с) + \mathbf{P}(1с2н) = \frac{5}{25}\cdot\frac{4}{24} + \frac{5}{25}\cdot\frac{20}{24} = \frac{1}{5}\ ,\\
\mathbf{P}(2с) &= \mathbf{P}(1с2с) + \mathbf{P}(1н2с) = \frac{5}{25}\cdot\frac{4}{24} + \frac{20}{25}\cdot\frac{5}{24} = \frac{1}{5}\ .
\end{aligned}$$

Пример 4. *Вероятность попадания в цель из первого орудия равна 0.6, а из второго – 0.8. В цель выстрелили одновременно из двух орудий. Найти вероятность события*

$$A = \{\textit{в цель попали только из одного орудия}\}.$$

Введем события

1_+ – в цель попали из первого орудия,

1_- – в цель не попали из первого орудия,

2_+ – в цель попали из второго орудия,

2_- – в цель не попали из второго орудия.

Рассмотрим пространство элементарных событий

$$\Omega = \{1_+2_+,\ 1_+2_-,\ 1_-2_+,\ 1_-2_-\}.$$

Найдем вероятности элементарных событий

$$\mathbf{P}(1_+2_+) = 0.6 \cdot 0.8 = 0.48, \qquad \mathbf{P}(1_+2_-) = 0.6 \cdot 0.2 = 0.12,$$

$$\mathbf{P}(1_-2_+) = 0.4 \cdot 0.8 = 0.32, \qquad \mathbf{P}(1_-2_-) = 0.4 \cdot 0.2 = 0.08.$$

Теперь имеем

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(1_+2_-) + \mathbf{P}(1_-2_+) = 0.12 + 0.32 = 0.44.$$

2 Формула полной вероятности

Теорема 1 *Пусть дано вероятностное пространство* $\langle \Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P} \rangle$ *и события*

$$B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{A}$$

таковы, что $B_i B_j = \varnothing,\ i \neq j, \quad \Omega = B_1 + B_2 + \ldots B_n$. *Тогда для любого события* $A \in \mathcal{A}$ *имеет место формула полной вероятности*

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(A|B_1) + \mathbf{P}(B_2)\mathbf{P}(A|B_2) + \cdots + \mathbf{P}(B_n)\mathbf{P}(A|B_n). \qquad (1)$$

Доказательство. Из условия теоремы следует, что

$$A = B_1 A + B_2 A + \ldots + B_n A$$

и для событий в правой части имеем $(B_j A) \cap (B_k A) = \varnothing,\ j \neq k$. Поэтому,

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B_1 A) + \mathbf{P}(B_2 A) + \ldots + \mathbf{P}(B_n A).$$

Воспользовавшись теоремой умножения вероятностей, получим

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(A|B_1) + \mathbf{P}(B_2)\mathbf{P}(A|B_2) + \cdots + \mathbf{P}(B_n)\mathbf{P}(A|B_n). \qquad \square$$

Пример 5. *В трех урнах имеется* N_1, N_2 *и* N_3 *шаров белого и черного цвета. Количество белых шаров в первой урне равно* n_1, *во второй –* n_2 *и в третей –* n_3. *Из случайно выбранной урны выбрали случайный шар. Найти вероятность того, что он оказался белым.*

Рассмотрим события

$$\begin{aligned} A &= \{\text{выбранный шар оказался белым }\}, \\ B_1 &= \{\text{выбрали 1-ю урну}\}, \\ B_2 &= \{\text{выбрали 2-ю урну}\}, \\ B_3 &= \{\text{выбрали 3-ю урну}\}. \end{aligned}$$

По формуле полной вероятности имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(A|B_1) + \mathbf{P}(B_2)\mathbf{P}(A|B_2) + \mathbf{P}(B_3)\mathbf{P}(A|B_3) \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{n_1}{N_1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{n_2}{N_2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{n_3}{N_3} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \frac{n_3}{N_3}\right). \end{aligned}$$

3 Формула Байеса

Теорема 2 *Пусть дано вероятностное пространство* $\langle \Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P} \rangle$ *и события*

$$B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{A}$$

таковы, что $B_i B_j = \varnothing,\ i \neq j,\quad \Omega = B_1 + B_2 + \ldots B_n$. *И пусть событие* $A \in \mathcal{A}$. *Тогда имеет место формулы Байеса*

$$\mathbf{P}(B_1|A) = \frac{\mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(A|B_1)}{\mathbf{P}(A)}, \ldots, \mathbf{P}(B_n|A) = \frac{\mathbf{P}(B_n)\mathbf{P}(A|B_n)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Здесь $\mathbf{P}(A)$ *вычисляется по формуле полной вероятности (1).*

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(B_i|A) \\ &= \frac{\mathbf{P}(B_iA)}{\mathbf{P}(A)} && \text{по определению условной вероятности} \\ &= \frac{\mathbf{P}(B_i)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(A)} && \text{по теореме умножения вероятностей событий} \\ &= \frac{\mathbf{P}(B_i)\mathbf{P}(A)}{\sum_{j=1}^{n}\mathbf{P}(B_j)\mathbf{P}(A|B_j)} && \text{по формуле полной вероятности} \qquad \square \end{aligned}$$

В контексте формул Байеса вероятности

$$\mathbf{P}(B_1), \mathbf{P}(B_2), \ldots, \mathbf{P}(B_n)$$

называются *априорными*, а вероятности

$$\mathbf{P}(B_1|A), \mathbf{P}(B_2|A), \ldots, \mathbf{P}(B_n|A)$$

называются *апостериорными.*

Пример 6. *Известно, что 4 % всех мужчин и 0.25 % всех женщин являются дальтониками. Наудачу выбранное лицо оказалось дальтоником. Чему равна вероятность того, что выбран мужчина? Что выбрана женщина?*

Рассмотрим события

$$\begin{aligned} A &= \{\text{выбранное лицо является дальтоником}\}, \\ B_1 &= \{\text{выбранное лицо является мужчиной}\}, \\ B_2 &= \{\text{выбранное лицо является женщиной}\}. \end{aligned}$$

По формуле полной вероятности имеем

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(A|B_1) + \mathbf{P}(B_2)\mathbf{P}(A|B_2) = \frac{1}{2} \cdot \Big(0.04 + 0.0025\Big) = \frac{17}{800}.$$

По формулам Байеса имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B_1|A) &= \frac{\mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(A|B_1)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{(1/2)\cdot(0.04)}{17/800} = \frac{16}{17}. \\ \mathbf{P}(B_2|A) &= \frac{\mathbf{P}(B_2)\mathbf{P}(A|B_2)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{(1/2)\cdot(0.0025)}{17/800} = \frac{1}{17}. \end{aligned}$$