**<u>Лекція 1.</u> <u>ВСТУП В ПРЕДМЕТ "МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ"</u>**

*Організація навчального процесу. Рекомендована література. Предмет вивчення математичної фізики. Класифікація рівнянь математичної фізики. Поділ змінних, види граничних умов. Гільбертовий простір. Ортогональні системи векторів.*

<u>0. Організація навчального процесу.</u> *Метою* курсу є засвоєння студентами основних методів розв'язання трьох головних типів диференціальних рівнянь математичної фізики, за допомогою яких вдається описати переважна більшість *лінійних* фізичних процесів.

За результатами курсу студент повинен

- *знати* фізичний зміст основних лінійних задач математичної фізики;
- *уміти* розв'язувати лінійні задачі математичної фізики в прямокутній декартовій системі координат методом розкладання по власних функціях (метод поділу змінних), методами інтегралів Фур'є й Лапласа (операційний метод), а також у циліндричній і сферичній системах координат.

Для успішної здачі курсу «Методи математичної фізики» **студент зобов'язаний:**

1) відвідати всі лекції й наприкінці семестру представити повний *рукописний* їхній конспект, виконаний *власноручно*;
2) відвідати всі практичні заняття, розв'язати всі задачі для роботи в аудиторії, виконати всі домашні завдання й наприкінці семестру представити повний *рукописний* їхній конспект, виконаний *власноручно*;
3) виконати індивідуальне розрахункове завдання й здати його в *рукописному виді* не пізніше дня проведення останнього практичного заняття;
4) написати контрольні роботи;
5) у встановлене розкладом час прийти на іспит.

***Рекомендована література***

По методах математичної фізики існує дуже велике число гарних і корисних книг. Вони відрізняються друг від друга як повнотою висвітлення тих або інших питань, так і строгістю викладу матеріалу. Безумовно, вибір лектором рекомендованої літератури є досить суб'єктивним. Наприклад, можна порекомендувати такі книги:


1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 724 с.
2. Агошков В. Г. Методы решения задач математической физики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 320 с.
3. Кошляков Н. С., Гиннер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.
4. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1984. – 313 с.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1965. – 716 с.
6. Араманович И. Г., Левин В. И. Уравнения математичекой физики. – М.: Наука, 1969. – 288 с.
7. Будак В. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 688 с.
8. Смирнов М. М. Задачи по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1975. – 125 с.
9. Шелковников Ф. А., Такайшвили Г. К. Сборник упражнений по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1976. – 184 с.
10. А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров Специальные функции математической физики.– М.: Наука, 1984. – 344с..


<u>1. Предмет вивчення математичної фізики (МФ).</u> Предметом МФ є математичні задачі, що виникають при вивченні різних фізичних процесів і явищ. Ця галузь науки і її методи почали формуватися в 18 столітті при вивченні коливань струни й стрижня, при розв'язку задач акустики, гідродинаміки й аналітичної механіки. В 19 столітті ідеї МФ одержали новий розвиток у зв'язку із задачами теплопровідності, дифузії, пружності, оптики і т.д. Фактично, коло питань, розглянутих у МФ охоплює всі розділи фізики. В 20 столітті в неї включаються задачі теорії відносності, квантової фізики, теорії ядерних реакцій, фізики плазми і т.д.

Метод дослідження цієї галузі наук по своїй суті є математичним, однак постановка задач пов'язана з вивченням фізичних проблем, а тому має свої особливості. Коло задач, що відносяться до МФ надзвичайно широкий, однак у даному курсі ми розглянемо задачі МФ, що приводять до диференціальних рівнянь із частинними похідними, коли невідома функція залежить від двох і більшого числа незалежних змінних. Найбільше часто при цьому зустрічаються диференціальні рівняння 2-го порядку. Далі ми будемо розглядати саме такі рівняння. У нашім же курсі ми вивчимо лише малу частину того, що насправді відомо в сучасній математичній фізиці. Це буде найпростіший для розуміння й оволодіння матеріал, заснований на знаннях з курсів по математичному аналізу, аналітичній геометрії, лінійній алгебрі, диференціальним рівнянням, комплексному аналізі. Із цієї причини слухачам настійно рекомендується в міру вивчення нового матеріалу звертатися до старих конспектів і книгам по вищевказаних предметах.

У нашому курсі ми дотримуємося *фізичного*, а *не математичного рівня строгості*. Це означає, що нас, першу чергу, цікавить питання «як це зробити?», а не «чому це можна зробити?» іншими словами ми будемо опускати докази, зосереджуючи увагу на послідовності дій при розв'язанні тієї або іншої задачі. У якості обґрунтування такого підходу можна навести висловлення видатного американського фізика XX століття Р. Фейнмана: «Зайва математична строгість не дуже корисна у фізиці». Справа в тому, що той або інше питання можна викласти або строго, або зрозуміло. Сполучити ж одне з іншим, як показує практика, дуже складно. Використовуваний нами підхід, імовірно, трохи некоректний для математиків, але є корисним і доцільним для фізиків.

<u>2. Класифікація рівнянь МФ</u>. Рівняннями із частками похідними 2-го порядку із двома невідомими $x$ й $y$ називається співвідношення між невідомою функцією $u(x,y)$ і її частками похідними до 2-го порядку включно:

$$F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)=0.$$

Аналогічно записується рівняння для більшого числа змінних. Далі ми будемо розглядати тільки лінійні диференціальні рівняння, тобто рівняння виду:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Gu=f\left(x,y\right).$$

Якщо коефіцієнти рівняння не залежать від $x$ і $y$, то маємо рівняння з постійними коефіцієнтами. Рівняння називається *однорідним*, якщо $f\left(x,y\right)=0$, а якщо ні, то - *неоднорідним*. Таке рівняння за допомогою замін змінних $x$ і $y$ можна привести до канонічного виду. Диференціальне рівняння належить до:

1) гіперболічному типу, якщо $B^2-AC>0$,
2) параболічному типу, якщо $B^2-AC=0$,
3) еліптичному типу, якщо $B^2-AC<0$.

Тут простежується аналогія із кривими другого порядку.

Диференціальні рівняння із частинними похідними класифікуються й за іншою ознакою. Якщо одна зі змінних $t$ (час), то рівняння називається *нестаціонарним* і описує фізичні процеси, що розвиваються в часі. Якщо $t$ відсутнє, то маємо *стаціонарне* рівняння, яке описує процеси, що встановилися в часі.

Розглянемо ці рівняння.

1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=f\left(x,t\right)$ - *рівняння гіперболічного типу*. Використовується при вивченні різних видів хвиль - звукових, електромагнітних і т.д. У зв'язку із цим дане рівняння називається хвильовим.

2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t}=f\left(x,t\right)$ - *рівняння параболічного типу*. Описує процеси поширення тепла в однорідним ізотропнім тілі й тому називається рівнянням теплопровідності. Дане рівняння описує також явище дифузії.

3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-f\left(x,y,z\right)$ - *рівняння еліптичного типу*, яке також називають *рівнянням Пуассона*. Дане рівняння описує, тепловий стан що встановився в однорідному ізотропному тілі. Описує також потенціали тяжіння й стаціонарного електричного поля. При $f\left(x,y,z\right)=0$ (відсутність джерел тепла, мас, зарядів) дане рівняння називається *рівнянням Лапласа*.

Ці рівняння часто називають *основними рівняннями МФ*. Кожне із цих рівнянь має нескінченну множину часткових розв'язків. Однак при розв'язанні конкретної фізичної задачі із усіх цих розв'язків необхідно вибрати те, яке задовольняє деяким додатковим умовам, що випливають із її фізичного змісту. Додаткові умови, задані на границі досліджуваної області, називаються *граничними* або *крайовими умовами*, а додаткові умови, що ставляться до моменту часу, з якого починається вивчення даного фізичного явища, називаються *початковими умовами*.

Для рівнянь еліптичного типу задаються тільки граничні умови. Для рівнянь гіперболічного й параболічного типів задаються одночасно початкові й граничні умови. Математична задача, що описує реальний фізичний процес, повинна задовольняти трьом вимогам - *можливості розв'язання, однозначності* й н*еперервної* залежності від вихідних даних. Задача, що задовольняє цим вимогам, називається *коректно поставленою*. Дотримання вимог коректності постановок задач МФ забезпечує фізичну змістовність їх розв'язку.

3. Поділ змінних, види граничних умов. При розв'язанні рівнянь із частинними похідними ефективним методом розв'язання є *метод поділу змінних*. Розглянемо суть методу на прикладі рівняння теплопровідності без правої частини (однорідне рівняння).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{b^2}\frac{\partial u}{\partial t}=0.$$

Представимо невідому функцію $u(x,t)$ у вигляді добутку двох функцій:

$$u(x,t)=X(x)\cdot T(t),$$

де $X(x)$ - функція від координати, $T(t)$ - функція часу. Рівняння прийме вигляд:

$$T(t)\frac{d^2X}{dx^2}-\frac{1}{b^2}X(x)\frac{dT}{t}=0 \quad \left|\frac{1}{XT}\right..$$

Розділивши на $XT$, одержимо:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}-\frac{1}{b^2}\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}=0.$$

У цьому рівнянні перший доданок - функція $x$, друге - функція $t$. Природно припустити, що кожне з них рівне деякій постійній:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=\lambda, \qquad \frac{1}{b^2}\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}=\lambda.$$

Таким чином, рівняння із частинними похідними звелося до двох звичайних диференціальних рівнянн, розв'язання яких розглядався в курсі "Диференціальні рівняння". Розглянемо перше з них:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=\lambda.$$

Як уже говорилося, задача вважається поставленої, якщо задані граничні умови, наприклад, на кінцях відрізка $[0;l]$. Крайові задачі розглядаються, як правило, із граничними умовами виду:

$\begin{cases} X(0)=u_0, \\ X(l)=u_l \end{cases}$ - граничні умови першого роду (умова Діріхле),

$\begin{cases} X'(0)=u_0, \\ X'(l)=u_l \end{cases}$ - граничні умови другого роду (умова Неймана),

$\begin{cases} \alpha_1 X'(0)+\beta_1 X(0)=u_0, \\ \alpha_2 X'(l)+\beta_2 X(l)=u_l \end{cases}$ - граничні умови третього роду (умова Робіна).

Якщо числа $u_0$ й $u_l$ одночасно рівні 0, то граничні умови називаються однорідними, а якщо ні, то - неоднорідні. Дана задача називається *задачею Штурму-Ліувілля*.

3. Гільбертів простір. Розглянемо деяку множину функцій $f(x), g(x),...$ неперервних і диференційовних на інтервалі $0\le x\le l$, за винятком, можливо, окремих точок. Ця множина називається *лінійним простором* $C(0,l)$, якщо при $f,g\in C$ $\forall \alpha,\beta$ виконується $\alpha f+\beta g\in C$, причому дії додавання елементів $f(x), g(x),...$ і множення їх на числа $\alpha,\beta...$ повинні задовольняти аксіомам арифметики. Тоді елементи $f(x), g(x),...$ називаються векторами. Якщо в просторі $C(0,l)$ $\forall n\in N$ знайдеться $n$ лінійно незалежних векторів, то такий простір називається *нескінченновимірним*.

Скалярний добуток у лінійному просторі $C(0,l)$ введемо аксіоматично. Назвемо *скалярним добутком* дію, яка ставить у відповідність двом будь-яким векторам $f$ і $g$ число $(f,g)$, що задовольняє таким вимогам:

$$(f,g)=\overline{(g,f)},(\alpha f+\beta g,h)=\alpha(f,h)+\beta(g,h),(f,f)=\|f\|^2\geq 0,$$

$\|f\|^2=0$ тільки при $f=0$. Простір, у якому уведений скалярний добуток, називається *евклідовим*. У такому просторі можна вимірювати кути й відстані між векторами. Комплексний евклідів простір називається також *унітарним*.

Кут між векторами визначимо по формулі $\varphi=\arccos\dfrac{(f,g)}{\|f\|\cdot\|g\|}$, причому $|\cos\varphi|\leq 1$ в силу нерівності Коші-Буняковського. Вектори $f$ й $g$ називаються *взаємно ортогональними*, якщо $(f,g)=0$.

У функціональному просторі за скалярний добуток вибирають звичайно інтеграл виду

$$(f,g)=\int_0^l f(x)\overline{g(x)}r(x)dx,$$

де $|(f,g)|<\infty$, $r(x)$ - вага, $r(x)>0$ при $x\in[0,l]$. Эвклидів простір з таким скалярним добутком позначають $L_2(0,l|r)$ і називають *гільбертовим простором*.

4. Ортогональні системи векторів. У *гільбертовому* просторі, як у звичайному евклідовому просторі, можна побудувати ортонормовану систему векторів. Ортонормована система векторів $\{e_i\}$ називається *повною*, якщо немає жодного відмінного від нуля вектора, ортогонального до всіх $e_i$, тобто з рівності $(e_i,\tilde{e})\equiv 0,\ i\in N\Rightarrow\tilde{e}=0$.

Повну ортонормовану систему векторів, наявну в евклідовому просторі, називають *базисом* цього простору.

Нехай $f$ – вектор простору $L_2$. Тоді якщо можна представити $f$ у вигляді $f=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i$, тобто розкласти вектор $f$ по базису $\{e_i\}$, і цей ряд сходиться, то можна знайти коефіцієнти розкладання $\alpha_i$. Помножимо ліву й праву частини розкладання на $e_m$:

$$(f,e_m)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i,e_m\right)=\alpha_m(e_m,e_m)=\alpha_m\ \Rightarrow\ \alpha_m=(f,e_m),$$

Розкладання типу $f=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i$, де $\alpha_i$ - коефіцієнти розкладання, називається узагальненим рядом Фур'є.