Задания для самостоятельной работы

Требуется решить задачи для трех основных уравнений математической физики в декартовой системе координат методом разделения переменных.

В каждом из приведенных ниже трех примеров студенты, фамилии которых стоят в списке группы под номерами № 1–8, решают заданные уравнения с условиями, конкретные значения правых частей которых указаны под номерами № 1–8, соответственно. При этом значения параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ в граничных условиях задач выбираются из группы А. Другие студенты, фамилии которых стоят в списке под номерами № 9–16, № 17–24, № 25–32, решают каждое уравнение снова с условиями № 1–8, но выбирают значения параметров в граничных условиях уже из групп Б, В и Г, соответственно.

Например, студент, фамилия которого стоит в списке группы под номером № 13, решают все три задачи с условиями № 5, а значения параметров в граничных условиях каждой задачи выбирает из группы Б.

В условиях всех задач постоянные $A, B = const > 0$ и $\kappa = const \geq 0$; все параметры $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ могут принимать только значения, равные нулю или единице. В каждом пункте с номерами № 1–8 заданы конкретные значения всех неоднородных правых частей уравнений и условий задач.

Все неуказанные в пункте значения условий считаются равными нулю.

В конце решения каждой задачи следует сделать проверку полученного результата по условию задачи и по размерностям.

Пример 1. Решение одномерного волнового уравнения на отрезке.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x,t); \qquad u = u(x,t); \\ \alpha_1 \cdot u'_x\,(0,t) + \alpha_2 \cdot u(0,t) = \varphi(t); \qquad 0 \leq x \leq l; \\ \beta_1 \cdot u'_x\,(l,t) + \beta_2 \cdot u(l,t) = \psi(t); \qquad 0 \leq t < \infty. \\ u(x,0) = f(x), \qquad u'_t(x,0) = g(x). \end{cases}$$

Конкретные значения условий задачи:

№ 1. $F(x,t)=Ax$, $\varphi(t)=Bt$.
№ 2. $F(x,t)=Ax$, $\psi(t)=Bt$.
№ 3. $F(x,t)=At$, $\varphi(t)=B$.
№ 4. $F(x,t)=At$, $\psi(t)=B$.
№ 5. $\varphi(t)=At$, $f(x)=Bx$.
№ 6. $\psi(t)=At$, $f(x)=Bx$.
№ 7. $\varphi(t)=At$, $g(x)=Bx$.
№ 8. $\psi(t)=At$, $g(x)=Bx$.

Значения параметров в граничных условиях:

А. № 1–8. $\alpha_1=\beta_1=0$, $\alpha_2=\beta_2=1$.
Б. № 9–16. $\alpha_1=\beta_2=0$, $\alpha_2=\beta_1=1$.
В. № 17–24. $\alpha_2=\beta_1=0$, $\alpha_1=\beta_2=1$.
Г. № 25–32. $\alpha_2=\beta_2=0$, $\alpha_1=\beta_1=1$.

Пример 2. Решение уравнения теплопроводности в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial u}{\partial t}=F(x,y,t); \\ \alpha_1\cdot u'_x\,(0,y,t)+\alpha_2\cdot u(0,y,t)=\varphi_1(y,t); \\ \beta_1\cdot u'_x\,(l,y,t)+\beta_2\cdot u(l,y,t)=\varphi_2(y,t); \\ \gamma_1\cdot u'_y(x,0,t)+\gamma_2\cdot u(x,0,t)=\psi_1(x,t); \\ \delta_1\cdot u'_y(x,s,t)+\delta_2\cdot u(x,s,t)=\psi_2(x,t); \\ u(x,y,0)=f(x,y); \\ u=u(x,y,t); \quad 0\le x\le l; \quad 0\le y\le s; \quad 0\le t<\infty; \end{cases}$$

Конкретные значения условий задачи:

№ 1. $\varphi_1(y,t)=At$.
№ 2. $\varphi_1(y,t)=Ay$.
№ 3. $\varphi_2(y,t)=At$.
№ 4. $\varphi_2(y,t)=Ay$.
№ 5. $\psi_1(t)=At$.
№ 6. $\psi_1(t)=Ax$.
№ 7. $\psi_2(t)=At$.
№ 8. $\psi_2(t)=Ax$.

Значения параметров в граничных условиях:

А. № 1–8. $\alpha_2 = \beta_1 = \gamma_1 = \delta_1 = 0, \quad \alpha_1 = \beta_2 = \gamma_2 = \delta_2 = 1.$

Б. № 9–16. $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \delta_1 = 0, \quad \alpha_2 = \beta_1 = \gamma_2 = \delta_2 = 1.$

В. № 17–24. $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_2 = \delta_1 = 0, \quad \alpha_2 = \beta_2 = \gamma_1 = \delta_2 = 1.$

Г. № 25–32. $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = \delta_2 = 0, \quad \alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = \delta_1 = 1.$

Пример 3. Решение уравнения Гельмгольца в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \kappa^2 u(x,y) = F(x,y); \\ \alpha_1 \cdot u'_x\,(0,y) + \alpha_2 \cdot u(0,y) = \varphi_1(y); \\ \beta_1 \cdot u'_x\,(l,y) + \beta_2 \cdot u(l,y) = \varphi_2(y); \\ \gamma_1 \cdot u'_y(x,0) + \gamma_2 \cdot u(x,0) = \psi_1(x); \\ \delta_1 \cdot u'_y(x,s) + \delta_2 \cdot u(x,s) = \psi_2(x). \\ u = u(x,y); \quad 0 \le x \le l; \quad 0 \le y \le s. \end{cases}$$

Конкретные значения условий задачи:

№ 1. $F(x,y)=Ax,$ $\varphi_1(y) = By.$

№ 2. $F(x,y)=Ax,$ $\varphi_2(y) = By.$

№ 3. $F(x,y)=Axy,$ $\varphi_1(y) = B.$

№ 4. $F(x,y)=Axy,$ $\varphi_2(y) = B.$

№ 5. $F(x,y)=Ay,$ $\psi_1(x) = Bx.$

№ 6. $F(x,y)=Ay,$ $\psi_2(x) = Bx..$

№ 7. $F(x,y)=Axy,$ $\psi_1(x) = B.$

№ 8. $F(x,y)=Axy,$ $\psi_2(x) = B.$

Значения параметров в граничных условиях:

А. № 1–8. $\alpha_2 = \beta_1 = \gamma_1 = \delta_1 = 0, \quad \alpha_1 = \beta_2 = \gamma_2 = \delta_2 = 1.$

Б. № 9–16. $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \delta_1 = 0, \quad \alpha_2 = \beta_1 = \gamma_2 = \delta_2 = 1.$

В. № 17–24. $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_2 = \delta_1 = 0, \quad \alpha_2 = \beta_2 = \gamma_1 = \delta_2 = 1.$

Г. № 25–32. $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = \delta_2 = 0, \quad \alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = \delta_1 = 1.$