Скалярні й векторні поля: градієнт, ротор, дивергенція. Оператор Гамильтона ∇

1° Скалярне поле

В об'ємі V задане **скалярне** поле f, якщо кожній крапці A

$$A \equiv \overrightarrow{OA} = \vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

поставлений у відповідність **скаляр** (число)

$$\vec{r} \to f = f(\vec{r}) = f(x, y, z)$$

Зручним геометричним описом скалярного поля є **поверхні рівня** (ізоповерхні) – поверхні сталості поля $f(\vec{r}) = const$. У випадку плоского поля говорять про лінії рівня (ізолінії).

Наприклад, температура $T(\vec{r})$ (ізотерми), щільність $\rho(\vec{r})$, тиск $p(\vec{r})$ (ізобари), потенціал електростатичного поля $\varphi(\vec{r})$ (еквіпотенціальні поверхні) і т.д.

Усякий одиничний вектор $\vec{e} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$ будемо називати напрямком. Похідній скалярного поля $f = f(\vec{r})$ в крапці $\vec{r}$ по напрямкові $\vec{e}$ називається

$$f'_{\vec{e}}(\vec{r}) = \frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(\vec{r}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(\vec{r} + \Delta t\,\vec{e}) - f(\vec{r})}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x + \Delta t \cos\alpha,\ y + \Delta t \cos\beta,\ z + \Delta t \cos\gamma) - f(x, y, z)}{\Delta t} = f_x' \cdot \cos\alpha + f_y' \cdot \cos\beta + f_z' \cdot \cos\gamma$$

Фізичний зміст похідної по напрямкові – швидкість зміни поля $f(\vec{r})$ в крапці $\vec{r}$ по напрямкові $\vec{e}$.

Градієнтом скалярного поля $f = f(\vec{r})$ називається вектор

$$\operatorname{grad} f(\vec{r}) = f_x'\,\vec{i} + f_y'\,\vec{j} + f_z'\,\vec{k} = \begin{bmatrix} f_x' \\ f_y' \\ f_z' \end{bmatrix}$$

Наведене визначення градієнта, зручне з погляду його знаходження, має той недолік, що залежить від вибору базису.

Зі зв'язку $\operatorname{grad} f(\vec{r})$ з похідної по напрямкові

$$\boxed{f'_{\vec{e}}(\vec{r}) = \left(\operatorname{grad} f(\vec{r}),\ \vec{e}\right)}$$

випливає інваріантний характер градієнта і його фізичний зміст.

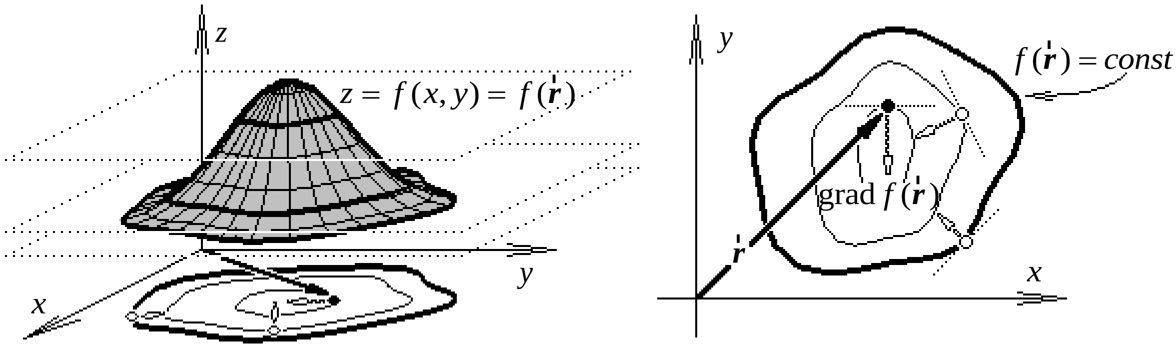
Теорема

1) напрямок $\operatorname{grad} f(\vec{r})$ - напрямок $\vec{e}_{\max}$
2) довжина $\operatorname{grad} f(\vec{r})$ - величина $f'_{\vec{e}_{\max}} = \max\limits_{\vec{e}} f'_{\vec{e}}$

] наибольшего роста поля $f(\vec{r})$

$$\boxed{\operatorname{grad} f = f'_{\vec{e}_{\max}} \cdot \vec{e}_{\max}}$$

3) $\operatorname{grad} f(\vec{r}) \perp$ поверхні (лінії) рівня $f(\vec{r}) = const$, що проходить через крапку $\vec{r}$



Зручно ввести в розгляд оператор Гамильтона - символічний вектор “набла” ∇

$$\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Тоді **градієнт** може бути записаний як “добуток” вектора ∇ на скаляр $f(\vec{r})$

$$\operatorname{grad} f(\vec{r}) = \vec{i}\,f_x' + \vec{j}\,f_y' + \vec{k}\,f_z' = \vec{i}\,\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right) f = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} f = \nabla f$$

2° Векторне поле

В об'ємі V задане **векторне** поле $\vec{F}$, якщо кожній крапці A

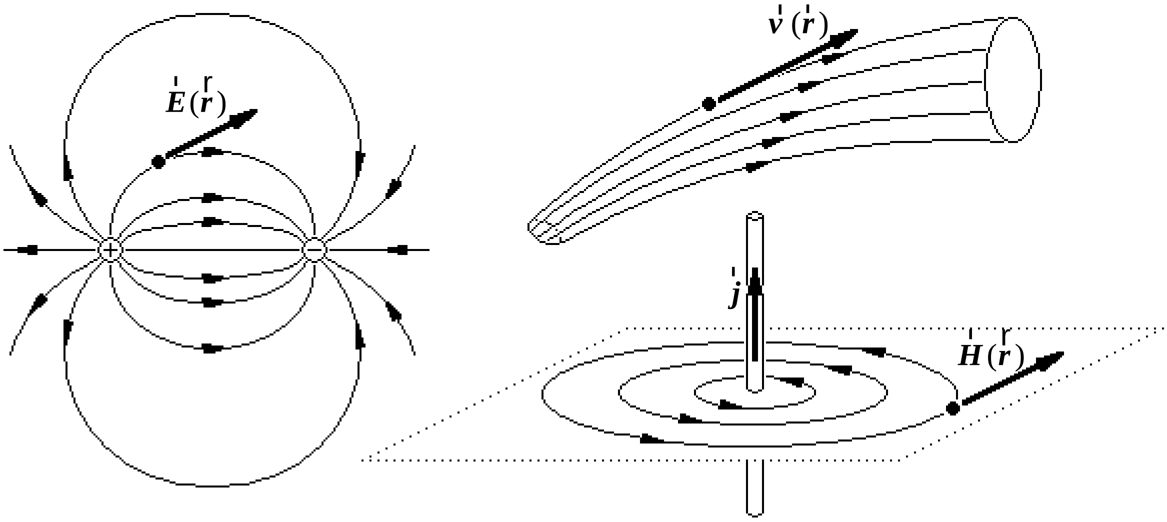
$$A \equiv \overrightarrow{OA} = \vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

поставлений у відповідність **вектор**

$$\vec{r} \to \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k} = \begin{bmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}$$

Зручним геометричним описом векторного поля є **векторні лінії** – криві, у кожній крапці яких дотична паралельна полю $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$. Пучок векторних ліній, що пронизують деяку поверхню S, утворює так звану **векторну трубку**.

Наприклад, стаціонарне поле швидкостей $\vec{v}(\vec{r})$ рідини (лінії струму), гравітаційне поле $\vec{F}(\vec{r})$, електростатичне поле $\vec{E}(\vec{r})$ (силові лінії), магнитостатическое поле $\vec{H}(\vec{r})$ (лінії індукції) і т.д.



Дивергенцією векторного поля $\vec{F}(\vec{r})$ називається **скаляр**

$$\operatorname{div}\vec{F}(\vec{r}) = P'_x + Q'_y + R'_z = \frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial}{\partial y}Q + \frac{\partial}{\partial z}R = \left(\nabla, \vec{F}(\vec{r})\right)$$

Ротором векторного поля $\vec{F}(\vec{r})$ називається **вектор**

$$\operatorname{rot}\vec{F}(\vec{r}) = \left(R'_y - Q'_z\right)\vec{i} + \left(P'_z - R'_x\right)\vec{j} + \left(Q'_x - P'_y\right)\vec{k} = \begin{bmatrix} R'_y - Q'_z \\ P'_z - R'_x \\ Q'_x - P'_y \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left[\nabla, \vec{F}(\vec{r})\right]$$

За допомогою оператора Гамильтона **дивергенція** й **ротор** можуть бути записані відповідно як “скалярне” і “векторне” “добутку” символічного вектора ∇ на вектор $\vec{F}(\vec{r})$.

Дані визначення дивергенції й ротора, зручні з погляду їх знаходження, мають той недолік, що залежать від вибору базису. Надалі будуть отримані інваріантні формули дивергенції й ротора й з'ясований їхній фізичний зміст.

При знаходженні

$$\mathrm{grad} = \nabla g,\ \mathrm{div} = \left(\nabla,\ g\right), \quad \mathrm{rot} = \left[\nabla,\ g\right]$$

оператор Гамильтона

$$\nabla = \vec{\boldsymbol i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\boldsymbol j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{\boldsymbol k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

зручно розглядати як “диференціальний вектор”, який “множиться **ліворуч**” на скаляр ∇g або вектор (у скалярному $\left(\nabla,\ g\right)$ / векторному $\left[\nabla,\ g\right]$ добутку).

Спочатку оператор ∇ діє подібно операції диференціювання. При цьому на знаходження часток похідних зручно дивитися, як на одномоментное дія, яка замість “штриха збоку” $(\ )'_{xyz}$ будемо позначати $\overset{\downarrow}{\overbrace{\quad}}$ “стрілкою зверху”.

Правила “стрілки” $\overset{\downarrow}{\overbrace{\quad}}$ випливають із відповідних правил “штриха” $(\ )'_{xyz}$ для

$a)$ суми $\qquad \alpha f + \beta g, \qquad \alpha \vec{\boldsymbol F} + \beta \vec{\boldsymbol G}$

$b)$ добутку $\qquad f \cdot g,\ f \cdot \vec{\boldsymbol G},\ \left(\vec{\boldsymbol F}, \vec{\boldsymbol G}\right), \qquad \left[\vec{\boldsymbol F}, \vec{\boldsymbol G}\right]$

$c)$ суперпозиції $\qquad f(g),\ f(\vec{\boldsymbol G}),\ \vec{\boldsymbol F}(g), \qquad \vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol G})$

Потім, сприймаючи ∇ як звичайний вектор у складі відповідного добутку і застосовуючи правила векторної алгебри, перетворимо отримане вираження, поставивши ∇ **ліворуч** від співмножника, на який він подіяв $\nabla \overset{\downarrow}{\overbrace{g}}$

Приклади

1.

$a)$

$$\mathrm{grad}\,(\alpha f(\vec{\boldsymbol r}) + \beta g(\vec{\boldsymbol r})) = \nabla\overset{\downarrow}{\overbrace{(\alpha f + \beta g)}} = \nabla(\alpha \overset{\downarrow}{f} + \beta \overset{\downarrow}{g}) = \alpha \nabla \overset{\downarrow}{f} + \beta \nabla \overset{\downarrow}{g} = \alpha\,\mathrm{grad}\,f(\vec{\boldsymbol r}) + \beta\,\mathrm{grad}\,g(\vec{\boldsymbol r})$$

$b)$

$$\mathrm{grad}\left(f(\vec{\boldsymbol r}) \cdot g(\vec{\boldsymbol r})\right) = \nabla\overset{\downarrow}{\overbrace{(f \cdot g)}} = \nabla(\overset{\downarrow}{f} \cdot g + f \cdot \overset{\downarrow}{g}) = \nabla \overset{\downarrow}{f} \cdot g + f \cdot \nabla \overset{\downarrow}{g} = \mathrm{grad}\,f(\vec{\boldsymbol r}) \cdot g(\vec{\boldsymbol r}) + f(\vec{\boldsymbol r}) \cdot \mathrm{grad}\,g(\vec{\boldsymbol r})$$

$c)$

$$\mathrm{grad}\,f(g(\vec{\boldsymbol r})) = \nabla\ \overset{\downarrow}{\overbrace{f(g)}} = \nabla\ \overset{\downarrow}{f}(g) \cdot \overset{\downarrow}{g} = \nabla f'(g) \cdot \overset{\downarrow}{g} = f'(g) \cdot \nabla \overset{\downarrow}{g} = f'(g(\vec{\boldsymbol r})) \cdot \mathrm{grad}\,g(\vec{\boldsymbol r})$$

2.

$a)$

$$\mathrm{grad}\,r = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,'_x \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,'_y \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,'_z \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{\vec{\boldsymbol r}}{r}$$

$b)$

$$\mathrm{grad}\,\frac{q}{r} = \nabla\ \overset{\downarrow}{\overbrace{q r^{-1}}} = \nabla q \left(-r^{-2}\right) \overset{\downarrow}{r} = -q r^{-2} \nabla \overset{\downarrow}{r} = -q r^{-2}\,\mathrm{grad}\,r = -\frac{q}{r^2}\frac{\vec{\boldsymbol r}}{r} = -q\frac{\vec{\boldsymbol r}}{r^3}$$

$c)$

$$\vec{\boldsymbol c} = \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla\left(\vec{\boldsymbol r}, \vec{\boldsymbol c}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \left(x \cdot c_x + y \cdot c_y + z \cdot c_z\right) = \begin{bmatrix} x'_x \cdot c_x + y'_x \cdot c_y + z'_x \cdot c_z \\ x'_y \cdot c_x + y'_y \cdot c_y + z'_y \cdot c_z \\ x'_z \cdot c_x + y'_z \cdot c_y + z'_z \cdot c_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} = \vec{\boldsymbol c}$$

$\Rightarrow$

$$\mathrm{grad}\left(\vec{\boldsymbol c}, \vec{\boldsymbol r}\right) = \nabla\ \overset{\downarrow}{\overbrace{\left(\vec{\boldsymbol c}, \vec{\boldsymbol r}\right)}} = \nabla\left(\vec{\boldsymbol c}, \overset{\downarrow}{\vec{\boldsymbol r}}\right) = \nabla\left(\overset{\downarrow}{\vec{\boldsymbol r}}, \vec{\boldsymbol c}\right) = \vec{\boldsymbol c}$$

3.

a)

$$\mathrm{div}\ (\alpha\vec{F}(\vec{r})+\beta\vec{G}(\vec{r})) = \left(\nabla,\ \overset{\downarrow}{\alpha\vec{F}+\beta\vec{G}}\right) = \left(\nabla,\ \alpha\overset{\downarrow}{\vec{F}} + \beta\overset{\downarrow}{\vec{G}}\right) =$$

$$= \alpha\left(\nabla,\ \overset{\downarrow}{\vec{F}}\right) + \beta\left(\nabla,\ \overset{\downarrow}{\vec{G}}\right) = \alpha\,\mathrm{div}\vec{F}(\vec{r}) + \beta\,\mathrm{div}\vec{G}(\vec{r})$$

$$\mathrm{rot}\ (\alpha\vec{F}(\vec{r})+\beta\vec{G}(\vec{r})) = \left[\nabla,\ \overset{\downarrow}{\alpha\vec{F}+\beta\vec{G}}\right] = \left[\nabla,\ \alpha\overset{\downarrow}{\vec{F}} + \beta\overset{\downarrow}{\vec{G}}\right] =$$

$$= \alpha\left[\nabla,\ \overset{\downarrow}{\vec{F}}\right] + \beta\left[\nabla,\ \overset{\downarrow}{\vec{G}}\right] = \alpha\,\mathrm{rot}\vec{F}(\vec{r}) + \beta\,\mathrm{rot}\vec{G}(\vec{r})$$

b)

$$\mathrm{div}\ (f(\vec{r})\cdot\vec{G}(\vec{r})) = \left(\nabla,\ \overset{\downarrow}{f\cdot\vec{G}}\right) = \left(\nabla,\ \overset{\downarrow}{f}\cdot\vec{G} + f\cdot\overset{\downarrow}{\vec{G}}\right) =$$

$$= \left(\nabla\overset{\downarrow}{f},\ \vec{G}\right) + f\left(\nabla,\ \overset{\downarrow}{\vec{G}}\right) = \left(\mathrm{grad}\, f(\vec{r}),\ \vec{G}(\vec{r})\right) + f(\vec{r})\cdot\mathrm{div}\ \vec{G}(\vec{r})$$

$$\mathrm{rot}\ (f(\vec{r})\cdot\vec{G}(\vec{r})) = \left[\nabla,\ \overset{\downarrow}{f\cdot\vec{G}}\right] = \left[\nabla,\ \overset{\downarrow}{f}\cdot\vec{G} + f\cdot\overset{\downarrow}{\vec{G}}\right] =$$

$$= \left[\nabla\overset{\downarrow}{f},\ \vec{G}\right] + f\left[\nabla,\ \overset{\downarrow}{\vec{G}}\right] = \left[\mathrm{grad}\, f(\vec{r}),\ \vec{G}(\vec{r})\right] + f(\vec{r})\cdot\mathrm{rot}\vec{G}(\vec{r})$$

c)

$$\mathrm{div}\ \vec{F}(g(\vec{r})) = \left(\nabla,\ \overset{\downarrow}{\vec{F}(g)}\right) = \left(\nabla,\ \overset{\downarrow}{\vec{F}}(g)\cdot\overset{\downarrow}{g}\right) = \left(\nabla,\ \vec{F}'(g)\cdot\overset{\downarrow}{g}\right) =$$

$$= \left(\nabla\overset{\downarrow}{g},\ \vec{F}'(g)\right) = \left(\mathrm{grad}\, g(\vec{r}),\ \vec{F}'(g(\vec{r}))\right)$$

$$\mathrm{rot}\ \vec{F}(g(\vec{r})) = \left[\nabla,\ \overset{\downarrow}{\vec{F}(g)}\right] = \left[\nabla,\ \overset{\downarrow}{\vec{F}}(g)\cdot\overset{\downarrow}{g}\right] = \left[\nabla,\ \vec{F}'(g)\cdot\overset{\downarrow}{g}\right] =$$

$$= \left[\nabla\overset{\downarrow}{g},\ \vec{F}'(g)\right] = \left[\mathrm{grad}\, g(\vec{r}),\ \vec{F}'(g(\vec{r}))\right]$$

Зауваження. Знаходження $\mathrm{rot} = [\nabla,\ \mathrm{g}]$ аналогічне $\mathrm{div} = (\nabla,\ \mathrm{g})$ із заміною $(\ ,\ )$ на $[\ ,\ ]$

4.

a)

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \operatorname{div}\vec{r} = \left(\nabla, \vec{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z = 1+1+1 = 3 \\ \operatorname{rot}\vec{r} = \left[\nabla, \vec{r}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} z'_y - y'_z \\ x'_z - z'_x \\ y'_x - x'_y \end{bmatrix} = \vec{0} \end{array} \right.$$

b) Для **сферичного** поля $\vec{E}(\vec{r}) = f(r)\cdot\vec{r}$ маємо

$$\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r}) = \left(\operatorname{grad} f(r), \vec{r}\right) + f(r)\cdot\operatorname{div}\vec{r} = f'(r)\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r}, \vec{r}\right) + f(r)\cdot 3 = r\cdot f'(r) + 3\cdot f(r)$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r}) = \left[\operatorname{grad} f(r), \vec{r}\right] + f(r)\cdot\operatorname{rot}\vec{r} = f'(r)\cdot\left[\frac{\vec{r}}{r}, \vec{r}\right] + f(r)\cdot\vec{0} = \vec{0}$$

c) Для поля швидкостей $\vec{v}(\vec{r}) = \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right]$ крапок, що обертається навколо осі $\vec{\omega} = \vec{c}$ тіла, маємо

$$\operatorname{div}\left[\vec{c}, \vec{r}\right] = \left(\nabla, \left[\overset{\downarrow}{\vec{c}}, \vec{r}\right]\right) = \left(\nabla, \left[\vec{c}, \vec{r}\right]\right) = -\left(\nabla, \left[\vec{r}, \vec{c}\right]\right) = -\left(\left[\nabla, \vec{r}\right], \vec{c}\right) = -\left(\operatorname{rot}\vec{r}, \vec{c}\right) = 0$$

$$\operatorname{rot}\left[\vec{c}, \vec{r}\right] = \left[\nabla, \left[\overset{\downarrow}{\vec{c}}, \vec{r}\right]\right] = \left[\nabla, \left[\vec{c}, \vec{r}\right]\right] = \vec{c}\left(\nabla, \vec{r}\right) - \left(\vec{c}, \nabla\right)\vec{r} = \vec{c}\operatorname{div}\vec{r} - \vec{c} = 2\vec{c}$$

Зауваження. Тут скористалися (зрівняти з **№ 5.2.** *c*))

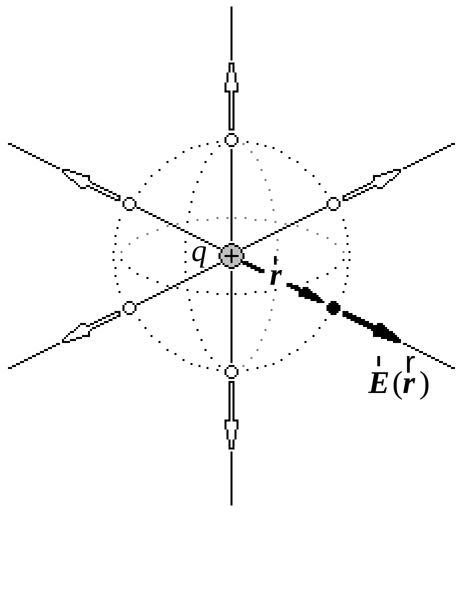
$$\vec{c} = \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} \Rightarrow \left(\vec{c}, \nabla\right)\vec{r} = \left(c_x\cdot\frac{\partial}{\partial x} + c_y\cdot\frac{\partial}{\partial y} + c_z\cdot\frac{\partial}{\partial z}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_x\cdot x'_x + c_y\cdot x'_y + c_z\cdot x'_z \\ c_x\cdot y'_x + c_y\cdot y'_y + c_z\cdot y'_z \\ c_x\cdot z'_x + c_y\cdot z'_y + c_z\cdot z'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} = \vec{c}$$

Зауваження**.** Сферическим (центрально-симетричним) є електростатичне поле крапкового заряду q **№ 11.5.**

$$\vec{E}(\vec{r}) = q\frac{\vec{r}}{r^3} \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{E}(\vec{r})\right| = \frac{q}{r^2}$$

Оборотний увага, що (?!)

$$\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r}) = 0, \qquad \operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \qquad \forall\vec{r} \neq \vec{0}$$



Зрівняти! Сферичне поле $\vec{E}(\vec{r}) = f(r)\cdot\vec{r}$ із **циліндричним** $\vec{E}(\vec{d}) = f(d)\vec{d}$

$$\operatorname{div}\vec{E}(\vec{d}) = \left(\operatorname{grad} f(d), \vec{d}\right) + f(d)\cdot\operatorname{div}\vec{d} = f'(d)\cdot\left(\frac{\vec{d}}{d}, \vec{d}\right) + f(d)\cdot 2 = d\cdot f'(d) + 2\cdot f(d)$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{d}) = \left[\operatorname{grad} f(d), \vec{d}\right] + f(d)\cdot\operatorname{rot}\vec{d} = f'(d)\cdot\left[\frac{\vec{d}}{d}, \vec{d}\right] + f(d)\cdot\vec{0} = \vec{0}$$

і із **завихренным** $\vec{H}(\vec{d}) = \left[\vec{e}, f(d)\vec{d}\right] = \left[\vec{e}, \vec{E}(d)\right]$

$$\operatorname{div}\vec{H}(\vec{d}) = \left(\nabla, \overset{\downarrow}{\left[\vec{e}, \vec{E}(\vec{d})\right]}\right) = \left(\nabla, \left[\vec{e}, \overset{\downarrow}{\vec{E}}(\vec{d})\right]\right) = -\left(\vec{e}, \left[\nabla, \overset{\downarrow}{\vec{E}}(\vec{d})\right]\right) = -\left(\vec{e}, \operatorname{rot}\vec{E}(\vec{d})\right) = 0$$

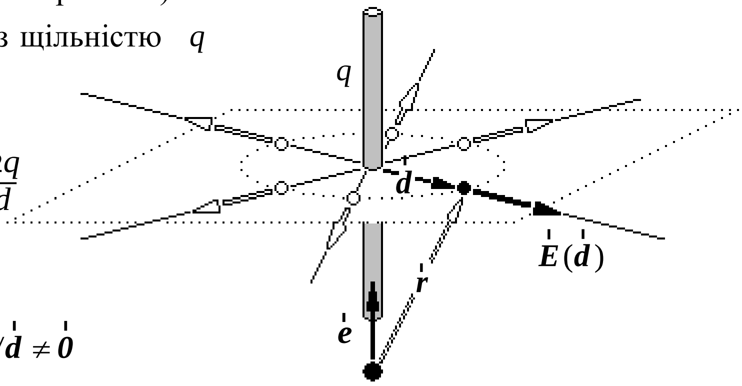
$$\operatorname{rot}\vec{H}(\vec{d}) = \left[\nabla, \overset{\downarrow}{\left[\vec{e}, \vec{E}(\vec{d})\right]}\right] = \vec{e}\left(\nabla, \overset{\downarrow}{\vec{E}}(\vec{d})\right) - \underbrace{\left(\vec{e}, \nabla\right)}_{\vec{0}}\overset{\downarrow}{\vec{E}}(\vec{d}) = \vec{e}\cdot\operatorname{div}\vec{E}(\vec{d})$$

Зауваження. Вибираючи "зручний" базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} = \vec{e}\}$, одержимо

$$\vec{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{d} \;\Rightarrow\; \vec{E}(\vec{d}) = \vec{E}(x,y) \;\Rightarrow\; \left(\vec{e}, \nabla\right)\overset{\downarrow}{\vec{E}}(\vec{d}) = \left(0\cdot\frac{\partial}{\partial x} + 0\cdot\frac{\partial}{\partial y} + 1\cdot\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{E}(x,y) = \vec{0}$$

Останні перетворення особливо гостро порушують питання про з'ясування інваріантності (незалежності від вибору базису) операцій $\operatorname{grad} = \nabla g$, $\operatorname{div} = (\nabla, g)$, $\operatorname{rot} = [\nabla, g]$

Зауваження. Циліндричним (осі-симетричним) є електростатичне поле зарядженого із щільністю q нескінченного провідника **№ 12.1.**

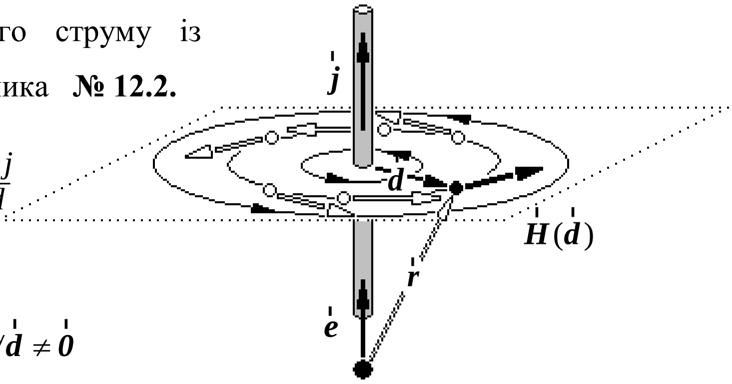


$$\vec{E}(\vec{d}) = 2q\,\frac{\vec{d}}{d^2} \quad\Rightarrow\quad \left|\vec{E}(\vec{d})\right| = \frac{2q}{d}$$

Оборотний увага, що (?!)

$$\operatorname{div}\vec{E}(\vec{d}) = 0, \qquad \operatorname{rot}\vec{E}(\vec{d}) = \vec{0} \qquad \forall\vec{d} \neq \vec{0}$$

Зауваження. (Осі-) завихренным є магнитостатическое поле постійного струму із щільністю $\vec{j}$ нескінченного провідника **№ 12.2.**



$$\vec{H}(\vec{d}) = \left[2\vec{j}, \frac{\vec{d}}{d^2}\right] \quad\Rightarrow\quad \left|\vec{H}(\vec{d})\right| = \frac{2j}{d}$$

Оборотний увага, що (?!)

$$\operatorname{div}\vec{H}(\vec{d}) = 0, \qquad \operatorname{rot}\vec{H}(\vec{d}) = \vec{0} \qquad \forall\vec{d} \neq \vec{0}$$

5.
Операції

$$\text{grad} = \nabla g,\ \text{div} = (\nabla,\ g), \quad \text{rot} = [\nabla,\ g]$$

називаються векторними операціями першого порядку

Побудуємо векторні операції другого порядку

	∇f	$[\nabla, \vec{F}]$	$(\nabla, \vec{F})$
∇g	$\nexists$	$\nexists$	$\nabla(\nabla, \vec{F})$
$[\nabla,\ g]$	$[\nabla, \nabla f]$	$[\nabla, [\nabla, \vec{F}]]$	$\nexists$
$(\nabla,\ g)$	$(\nabla, \nabla f)$	$(\nabla, [\nabla, \vec{F}])$	$\nexists$

Використовуючи символічне вирахування, одержимо

$$\text{rot grad} f(\vec{r}) = [\nabla, \nabla f] = [\nabla, \nabla] f = \vec{0}$$

$$\text{div rot} \vec{F}(\vec{r}) = (\nabla, [\nabla, \vec{F}]) = (\nabla, \nabla, \vec{F}) = ([\nabla, \nabla], \vec{F}) = 0$$

$$\text{div grad} f(\vec{r}) = (\nabla, \nabla f) = (\nabla, \nabla) f = \nabla^2 f = \Delta f = f''_{xx} + f''_{yy} + f''_{zz} \quad \text{-} \quad \textbf{лапласиан}$$

$$\text{grad div} \vec{F}(\vec{r}) = \nabla(\nabla, \vec{F}) = \begin{bmatrix} (P'_x + Q'_y + R'_z)'_x \\ (P'_x + Q'_y + R'_z)'_y \\ (P'_x + Q'_y + R'_z)'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P''_{xx} + Q''_{xy} + R''_{xz} \\ P''_{yx} + Q''_{yy} + R''_{yz} \\ P''_{zx} + Q''_{zy} + R''_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\text{rot rot} \vec{F}(\vec{r}) = [\nabla, [\nabla, \vec{F}]] = \nabla(\nabla, \vec{F}) - (\nabla, \nabla)\vec{F} = \text{grad div} \vec{F} - \Delta \vec{F} =$$

$$= \begin{bmatrix} P''_{xx} + Q''_{xy} + R''_{xz} \\ P''_{yx} + Q''_{yy} + R''_{yz} \\ P''_{zx} + Q''_{zy} + R''_{zz} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P''_{xx} + P''_{yy} + P''_{zz} \\ Q''_{xx} + Q''_{yy} + Q''_{zz} \\ R''_{xx} + R''_{yy} + R''_{zz} \end{bmatrix}$$

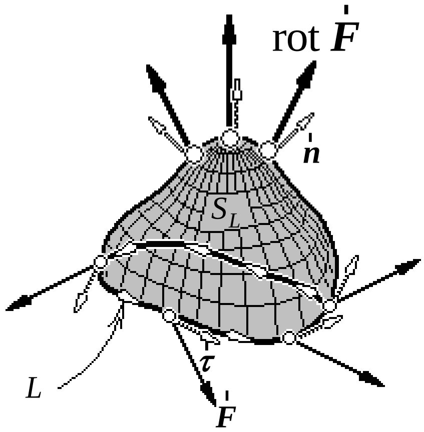
Отже,

	grad $f(\vec{r})$	rot $\vec{F}(\vec{r})$	div $\vec{F}(\vec{r})$
grad	$\nexists$	$\nexists$	grad div $\vec{F}(\vec{r})$
rot	$\vec{0}$	grad div $\vec{F}(\vec{r}) - \Delta\vec{F}(\vec{r})$	$\nexists$
div	$\Delta f(\vec{r})$	0	$\nexists$

Теорема Стокса. Ротор

Ротором векторного поля $\vec{F}(\vec{r})$ називається вектор

$$\operatorname{rot}\vec{F}(\vec{r})=\left[\nabla,\vec{F}(\vec{r})\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}R'_y - Q'_z\\ P'_z - R'_x\\ Q'_x - P'_y\end{bmatrix}=\left(R'_y-Q'_z\right)\vec{i}+\left(P'_z-R'_x\right)\vec{j}+\left(Q'_x-P'_y\right)\vec{k}$$



Теорема (Стокса)

Циркуляція векторного поля $\vec{F}(\vec{r})$ по замкненому контуру L дорівнює потоку ротора $\operatorname{rot}\vec{F}(\vec{r})$ через відповідну сторону поверхні S_L, що опирається на L

$$\boxed{\oint\limits_L\left(\vec{F}(\vec{r}),\,d\vec{L}\right)=\iint\limits_{S_L}\left(\operatorname{rot}\vec{F}(\vec{r}),\,d\vec{S}\right)}$$

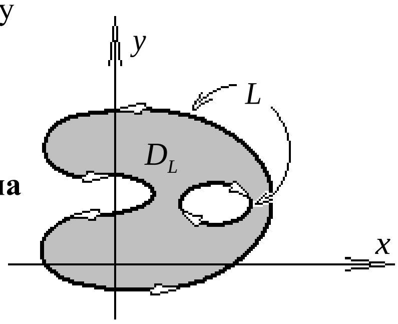
або

$$\oint\limits_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint\limits_{S_L}\left(R'_y-Q'_z\right)dy\,dz+\left(P'_z-R'_x\right)dz\,dx+\left(Q'_x-P'_y\right)dx\,dy$$

Зауваження. Орієнтація поверхні (поле одиничних векторів нормалей $\vec{n}(\vec{r})$) погоджена з орієнтацією кривій L (поле одиничних векторів дотичних $\vec{\tau}(\vec{r})$), тобто при русі вектора нормалі $\vec{n}$ уздовж кривій L у напрямку $\vec{\tau}$ поверхня S_L повинна залишатися ліворуч (обхід границі L з обраної сторони поверхні S_L повинен бути видний " проти годинникової стрілки" $\Rightarrow$ "правило правого гвинта")

В окремому випадку плоскої кривої, що обмежує плоску область D_L, і плоского поля

$$L=\left\{\begin{bmatrix}x=x(t)\\ y=y(t)\end{bmatrix},\ t\in\left[\alpha,\,\beta\right]\right\},\quad \vec{F}(\vec{r})=\begin{bmatrix}P(x,y)\\ Q(x,y)\end{bmatrix}$$

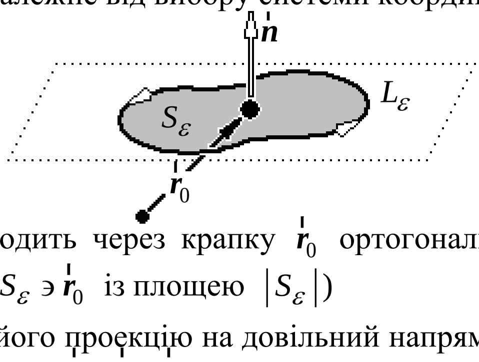


одержуємо окремий випадок формули Стокса - **формулу Гріна**

$$\boxed{\oint\limits_L P\,dx+Q\,dy=\iint\limits_{D_L}\left(Q'_x-P'_y\right)dx\,dy}$$

З теореми Стокса можна одержати інваріантне (не залежне від вибору системи координат) визначення ротора векторного поля

$$\boxed{\left(\operatorname{rot}\vec{F}(\vec{r}_0),\,\vec{n}\right)=\lim_{S_\varepsilon\to\vec{r}_0}\frac{\oint\limits_{L_\varepsilon}\left(\vec{F}(\vec{r}),\,d\vec{L}\right)}{\left|S_\varepsilon\right|}}$$

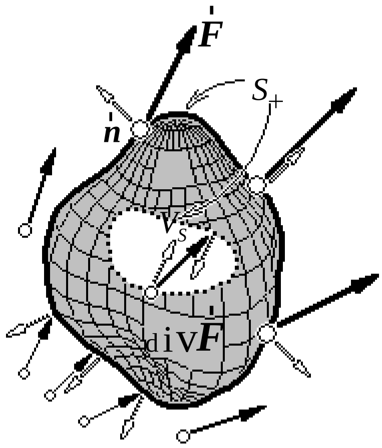


(тут L_ε - замкнений контур у площині, що проходить через крапку $\vec{r}_0$ ортогонально заданому напрямку $\vec{n}$, що обмежує плоску область $S_\varepsilon \ni \vec{r}_0$ із площею $\left|S_\varepsilon\right|$)

Наведена формула дозволяє знайти не сам ротор, а його проекцію на довільний напрямок. Вибираючи послідовно в якості $\vec{n}$ базисні вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ можна одержати дану вище координатну формулу для ротора.

Из инвариантного определения вытекает физический смысл ротора – плотность циркуляции векторного поля или, как говорят, степень завихренности поля (отсюда другое название ротора – **вихрь** поля).

Теорема Гаусса - Остроградского. Дивергенція



Дивергенцією векторного поля $\vec{F}(\vec{r})$ називається скаляр

$$\mathrm{div}\,\vec{F}(\vec{r}) = \left(\nabla,\, \vec{F}(\vec{r})\right) = \frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial}{\partial y}Q + \frac{\partial}{\partial z}R = P'_x + Q'_y + R'_z$$

Теорема (Гаусса-Остроградского)

Потік векторного поля $\vec{F}(\vec{r})$ через зовнішню сторону S_+ поверхні, що обмежує об'єм V_S, дорівнює об'ємному інтегралу від дивергенції поля $\mathrm{div}\,\vec{F}(\vec{r})$

$$\boxed{\oiint\limits_{S_+} \left(\vec{F}(\vec{r}),\, d\vec{S}\right) = \iiint\limits_{V_S} \mathrm{div}\,\vec{F}(\vec{r})\,dV}$$

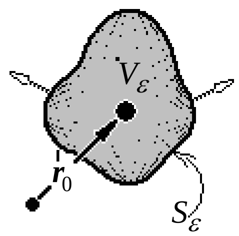
або

$$\iint\limits_{S_+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iiint\limits_{V_S} \left(P'_x + Q'_y + R'_z\right)dx\,dy\,dz$$

Зауваження. Орієнтація поверхні вибирається зовнішньої S_+ (поле одиничних векторів нормалей $\vec{n}(\vec{r})$ зовнішнє по відношенню к) V_S.

З теореми Гаусса-Остроградского можна одержати інваріантне (не залежне від вибору системи координат) визначення дивергенції векторного поля

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{F}(\vec{r}_0) = \lim_{V_\varepsilon \to \vec{r}_0} \frac{\oiint\limits_{S_\varepsilon} \left(\vec{F}(\vec{r}),\, d\vec{S}\right)}{\left|V_\varepsilon\right|}}$$



(тут S_ε - замкнена поверхня, що обмежує область $V_\varepsilon \ni \vec{r}_0$ із об'ємом $\left|V_\varepsilon\right|$)

З інваріантного визначення випливає фізичний зміст дивергенції – щільність (потужність, інтенсивність) джерел векторного поля або, як говорять, ступінь расходимости поля (звідси інша назва дивергенції – **расходимость** поля)

Інтегральні теореми про градієнт, ротор, дивергенцію, лапласиане

1° Формулу Гаусса-**Остроградского** можна додати вид, що одержав назву формули

“ про **дивергенцію**”

$$\boxed{\oiint\limits_{S_+} \left(\vec{n}(\vec{r}),\ \vec{F}(\vec{r}) \right) dS = \iiint\limits_{V_S} \left(\nabla,\ \vec{F}(\vec{r}) \right) dV}$$

Уважаючись замість $\vec{F}(\vec{r}) \ \to \ f(\vec{r})\cdot\vec{c},\ \left[\vec{F}(\vec{r}),\ \vec{c} \right],\ \ \mathrm{grad}\, f(\vec{r}) = \nabla f(\vec{r})$, одержуємо формули

“ про **градієнт**”

$$\boxed{\oiint\limits_{S_+} \vec{n}(\vec{r})\, f(\vec{r}) dS = \iiint\limits_{V_S} \nabla f(\vec{r}) dV}$$

“ про **ротор**”

$$\boxed{\oiint\limits_{S_+} \left[\vec{n}(\vec{r}),\ \vec{F}(\vec{r}) \right] dS = \iiint\limits_{V_S} \left[\nabla,\ \vec{F}(\vec{r}) \right] dV}$$

“ про **лапласиане**”

$$\boxed{\oiint\limits_{S_+} \underbrace{\left(\vec{n}(\vec{r}),\ \nabla f(\vec{r}) \right)}_{f'_{\vec{n}}(\vec{r})} dS = \iiint\limits_{V_S} \underbrace{\left(\nabla,\ \nabla f(\vec{r}) \right)}_{\Delta f(\vec{r})} dV}$$

Звідси випливають однакові інваріантні визначення векторних операцій

градієнт

$$\boxed{\nabla f(\vec{r}_0) = \lim_{V_\varepsilon \to \vec{r}_0} \frac{\displaystyle\oiint_{S_\varepsilon} \vec{n}(\vec{r})\, f(\vec{r})\, dS}{|V_\varepsilon|}}$$

дивергенція

$$\boxed{\left(\nabla,\ \vec{F}(\vec{r}_0)\right) = \lim_{V_\varepsilon \to \vec{r}_0} \frac{\displaystyle\oiint_{S_\varepsilon} \left(\vec{n}(\vec{r}),\ \vec{F}(\vec{r})\right) dS}{|V_\varepsilon|}}$$

ротор

$$\boxed{\left[\nabla,\ \vec{F}(\vec{r}_0)\right] = \lim_{V_\varepsilon \to \vec{r}_0} \frac{\displaystyle\oiint_{S_\varepsilon} \left[\vec{n}(\vec{r}),\ \vec{F}(\vec{r})\right] dS}{|V_\varepsilon|}}$$

лапласиан

$$\boxed{\Delta f(\vec{r}_0) = \lim_{V_\varepsilon \to \vec{r}_0} \frac{\displaystyle\oiint_{S_\varepsilon} \left(\vec{n}(\vec{r}), \nabla f(\vec{r})\right) dS}{|V_\varepsilon|} = \lim_{V_\varepsilon \to \vec{r}_0} \frac{\displaystyle\oiint_{S_\varepsilon} f'_{\vec{n}}(\vec{r})\, dS}{|V_\varepsilon|}}$$

2° З формули Гаусса-**Остроградского** при $\vec{F}(\vec{r}) = f(\vec{r})\,\nabla g(\vec{r})$, випливає

1) **перша формула Гріна**

$$\boxed{\oiint_{S_+} f(\vec{r})\, g'_{\vec{n}}(\vec{r})\, dS = \iiint_{V_S} \left(f(\vec{r})\, \Delta g(\vec{r}) + \left(\nabla f(\vec{r}),\ \nabla g(\vec{r})\right)\right) dV}$$

з якої випливає “симетрична”

2) **друга формула Гріна**

$$\boxed{\oiint_{S_+} \left(f(\vec{r})\, g'_{\vec{n}}(\vec{r}) - g(\vec{r})\, f'_{\vec{n}}(\vec{r}) \right) dS = \iiint_{V_S} \left(f(\vec{r})\, \Delta g(\vec{r}) - g(\vec{r})\, \Delta f(\vec{r}) \right) dV}$$

преобертова при $g(\vec{r}) = \dfrac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$, де $\vec{r}_0 \in V_S$ внутрішня крапка, в

3) **інтегральну формулу Гріна**

$$\boxed{4\pi f(\vec{r}_0) = -\iiint_{V_S} \frac{\Delta f(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}\, dV - \oiint_{S} f(\vec{r})\, \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}\, dS + \oiint_{S} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}\, \frac{\partial}{\partial \vec{n}} f(\vec{r})\, dS}$$

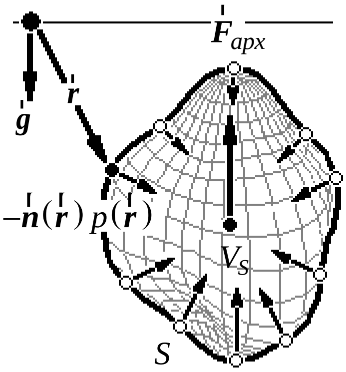
3° Розглянемо ряд корисних фізичних прикладів застосування інтегральних теорем.

3.1° Градієнт (закон Архімеда)

Тіло V занурене в рідину. Виходячи із закону Паскаля, показати, що сила, що виштовхує, дорівнює ваги рідини в об'ємі тіла й спрямована вертикально нагору.

У спочиваючій рідині під дією сили ваги кожний її шар давить своєю вагою на нижні шари. Створюване тим самим гідростатичний тиск за законом **Паскаля передається в усіх напрямках однаково** й рівно

$$p(\vec{r}) = \rho g h = \rho \cdot (\vec{g}, \vec{r})$$



Сила тиску, що діє з боку рідини в крапці $\vec{r}$ на елементарну площу dS рівна по величині $p(\vec{r})dS$ й спрямована по нормалі $-\vec{n}(\vec{r})$

$$d\vec{F}_{\text{äàâ}}(\vec{r}) = -\vec{n}(\vec{r})\,p(\vec{r})\,dS$$

(Якщо тіло занурене в рідину не повністю, те сила тиску на "верхню" сторону зануреної частини дорівнює нулю, як і повинне бути на глибині $h = 0$).

Отже сила, що результирующая, гідростатичного тиску (Архімеда) рівна

$$\vec{F}_{\text{àðõ}} = \oiint\limits_S d\vec{F}_{\text{äàâ}}(\vec{r}) = -\oiint\limits_S \vec{n}(\vec{r})\,p(\vec{r})\,dS = -\rho \oiint\limits_S \vec{n}(\vec{r})(\vec{g}, \vec{r})\,dS = -\rho \iiint\limits_{V_S} \underbrace{\operatorname{grad}(\vec{g}, \vec{r})}_{\vec{g}}\,dV =$$

$$= -\rho\,\vec{g} \iiint\limits_{V_S} \underbrace{1\,dV}_{V} = -\rho V \vec{g} = -m\vec{g} = -\vec{G}$$

Тим самим отриманий закон **Архімеда**: **на тіло, занурене в рідину, діє сила, що виштовхує, рівна ваги витиснутої рідини.**

Зауваження. Наочно уявити собі закон Архімеда можна, замінивши тіло поміщене в рідину на саму цю рідину, вагу якої в спокої врівноважується гідростатичним тиском.

Зауваження. У стані невагомості гідростатичний тиск, обумовлений вагомий рідини, отсутствует, так що сила Архімеда дорівнює нулю.

$$\boxed{\oiint\limits_S d\vec{S} = \oiint\limits_S \vec{n}(\vec{r})\,dS = \vec{0}}$$

Зауваження. Діаметрально протилежно случаю плаваючого тіла, що перетинається з верхнім рівнем рідини, виглядає ситуація зіткнення з нижнім (дном). У цьому випадку сила, що виштовхує, гідростатичного тиску зменшується на величину, пропорційну площі зіткнення (тобто на величину ваги відповідного стовпа рідини).

Поплавець, герметично притиснутий до дна резервуара, не буде спливти, тому що до сили ваги, що тягне його вниз, додасться ще й сила тиску стовпа рідини над ним.

3.2° Ротор (кутова швидкість)

> Тверде тіло обертається навколо нерухливої осі з **кутовою швидкістю** $\vec{\omega}$.
> Знайти **расходимость** і **вихор лінійних швидкостей** $\vec{v}(\vec{r})$ крапок твердого тіла.

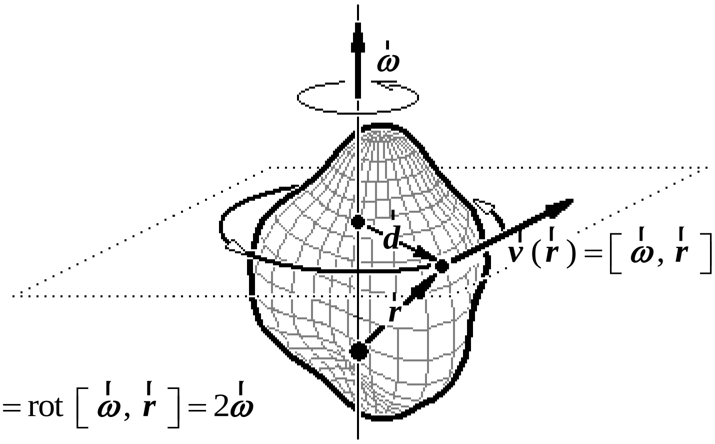
Лінійна швидкість $\vec{v}(\vec{r})$ крапки $\vec{r}$ спрямована по дотичній до окружності радіуса $d = |\vec{d}|$, що лежить у площині ортогональної осі $\vec{\omega}$, так що $\vec{v} \perp \vec{\omega} \perp \vec{d}$

Враховуючи, що

$$|\vec{v}| = v = \omega d = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{d}| \cdot \sin\tfrac{\pi}{2}$$

одержимо (зрівняти стор. 5)

$$\vec{v}(\vec{r}) = [\vec{\omega}, \vec{d}] = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$



Отже, (див. **№ 5.4.**)

$$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) = \operatorname{div}[\vec{\omega}, \vec{r}] = 0 \qquad \operatorname{rot} \vec{v}(\vec{r}) = \operatorname{rot}[\vec{\omega}, \vec{r}] = 2\vec{\omega}$$

Зауваження. Знаходження **div** й **rot** за допомогою відповідних інтегральних формул, що випливають із теореми Гаусса-**Остроградского**, буде проведено в **№ 10.3.**

Для різноманітності при обчисленні **rot** скористаємося іншою інтегральною формулою, раніше отриманої з теореми **Стокса** (стор. 53)

$$(\operatorname{rot} \vec{v}(\vec{r}_0), \vec{n}) = \lim_{S_\varepsilon \to \vec{r}_0} \frac{1}{|S_\varepsilon|} \oint_{L_\varepsilon} (\vec{v}(\vec{r}), d\vec{L}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|S_\varepsilon|} \oint_{L_\varepsilon} ([\vec{\omega}, \vec{r}], \vec{\tau})\, dL =$$

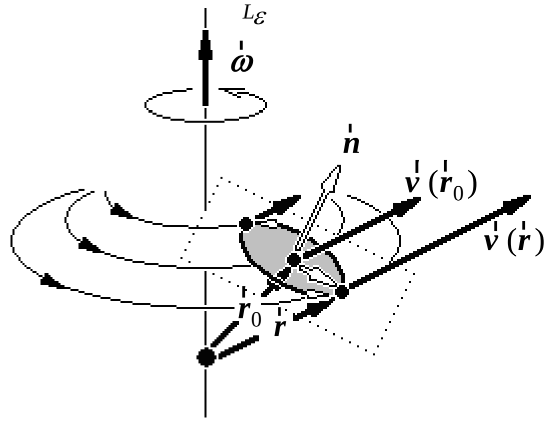
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|S_\varepsilon|} \Big((\vec{\omega}, \oint_{L_\varepsilon} [\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{\tau}]\, dL) + ([\vec{\omega}, \vec{r}_0], \oint_{L_\varepsilon} \vec{\tau}\, dL) \Big) = \rightarrow$$

Зауважуючи, що

$$\boxed{\oint_L d\vec{L} = \oint_L \vec{\tau}\, dL = \vec{0}}$$

одержимо

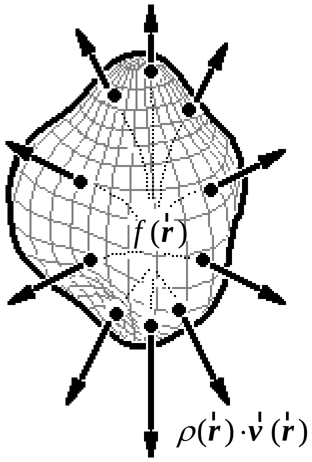
$$\rightarrow = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|S_\varepsilon|} (\vec{\omega}, \oint_{L_\varepsilon} [\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{\tau}]\, dL) = \rightarrow$$



Поберемо в якості контуру L_ε окружність радіуса ε ($\Rightarrow |S_\varepsilon| = \pi \varepsilon^2$) із центром $\vec{r}_0$ лежачої в площині $\perp \vec{n}$. У будь-якій крапці $\vec{r}$ окружності її радіус-вектор $\vec{r} - \vec{r}_0 \perp \vec{\tau}$ вектору дотичній, так що $[\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{\tau}] = \varepsilon \cdot \vec{n}$. Маємо

$$\rightarrow = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} (\vec{\omega}, \oint_{L_\varepsilon} \varepsilon \cdot \vec{n}\, dL) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} (\vec{\omega}, \varepsilon \cdot \vec{n}) \cdot 2\pi\varepsilon = (2\vec{\omega}, \vec{n}) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot} \vec{v}(\vec{r}) = 2\vec{\omega}$$

3.3° Дивергенція (стаціонарний рух рідини)



Нехай в об'ємі V циркулюють стаціонарні потоки рідини, характеризуемые, що встановилося розподілом постійної швидкості $\vec{v}(\vec{r})$ (у кожній крапці своєї) і постійної щільності $\rho(\vec{r})$. Припустимо, що є внутрішні джерела рідини інтенсивності $f(\vec{r})$ (кількість рідини, виділюване в крапці $\vec{r}$ за одиницю часу). Знайти рівняння, що описує розподіл швидкості $\vec{v}(\vec{r})$ й щільності $\rho(\vec{r})$ в об'ємі V.

Виділимо досить малий об'єм V_ε, що оточує крапку $\vec{r}$ й обмежений поверхнею S_ε. Кількість рідини, що виділилося усередині V_ε за рахунок джерел, рівно

$$m_\varepsilon = \iiint\limits_{V_\varepsilon} f(\vec{r})dV$$

Оскільки щільність $\rho(\vec{r})$ залишається незмінної, та кількість, що утворювалася, рідини випливає в зовнішність через поверхню S_ε

$$m_\varepsilon = \oiint\limits_{S_\varepsilon} \left(\rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}),\, d\vec{S} \right)$$

Таким чином,

$$\oiint\limits_{S_\varepsilon} \left(\rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}),\, d\vec{S} \right) = \iiint\limits_{V_\varepsilon} f(\vec{r})\,dV$$

Застосовуючи формулу Гаусса-Остроградского, одержимо

$$\iiint\limits_{V_\varepsilon} \operatorname{div}\left(\rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}) \right)dV = \iiint\limits_{V_\varepsilon} f(\vec{r})dV$$

У силу довільності об'єму V_ε, приходимо до рівності подынтегральных виражень

$$\boxed{\operatorname{div}\left(\rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}) \right) = f(\vec{r})}$$

називаному **стаціонарним рівнянням нерозривності.**

Отримане рівняння особливе чітко розкриває
фізичний зміст дивергенції – щільність джерел векторного поля.

Зауваження. Аналогічно можна розглянути усталений рух із щільністю $q(\vec{r})$ й швидкістю $\vec{v}(\vec{r})$ зарядів, тобто стаціонарний електричний струм із щільністю

$$\vec{j}(\vec{r}) = q(\vec{r})\vec{v}(\vec{r})$$

Фізичний **закон збереження зарядів**, формулируемый у тому розумінні, що заряди можуть лише переміщатися в просторі, але не можуть не виникати, не зникати ($f(\vec{r}) = 0$), здобуває диференціальну форму

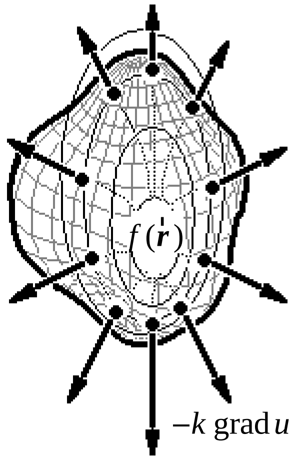
$$\boxed{\operatorname{div}\vec{j}(\vec{r}) = 0}$$

Якщо стаціонарний струм циркулює в об'ємі V, то на границі S_V, мабуть, струм сковзає уздовж поверхні: $\vec{j}(\vec{r}) \perp \vec{n}(\vec{r})$, $\vec{r} \in S_V$. Отже,

$$\left(\nabla,\, \vec{j} \right)\Big|_V = \left(\vec{n},\, \vec{j} \right)\Big|_{S_V} = 0$$

3.4° Лапласиан (стаціонарний розподіл тепла)

Нехай в об'ємі V циркулюють стаціонарні потоки тепла, характеризуемые, що встановилося розподілом постійної температури $u(\vec{r})$ (у кожній крапці своєї). Припустимо, що є внутрішні джерела тепла інтенсивності $f(\vec{r})$ (кількість тепла, виділюване в крапці $\vec{r}$ за одиницю часу). Знайти рівняння, що описує розподіл температури $u(\vec{r})$ в об'ємі V.



Виділимо досить малий об'єм V_ε, що оточує крапку $\vec{r}$ й обмежений поверхнею S_ε. Кількість тепла, що виділилося усередині V_ε за рахунок теплових джерел, рівно

$$Q_\varepsilon = \iiint\limits_{V_\varepsilon} f(\vec{r})dV$$

Оскільки температура $u(\vec{r})$ залишається незмінної, та кількість, що утворювалася, тепла випливає в зовнішність через S_ε поверхню .

Для його знаходження згадаємо очевидний фізичний факт: у нерівномірно нагрітому тілі потік тепла поширюється з місць із більш високою температурою в місця з більш низкою, причому тем интенсивней, чим більше перепад температур. Перепад температур у даній крапці $\vec{r}$ в заданому напрямку $\vec{n}$ - це похідна $u'_{\vec{n}}(\vec{r})$ в крапці $\vec{r}$ по напрямкові $\vec{n}$. Природно припустити, що кількість тепла, що протікає через орієнтований майданчик $d\vec{S} = \vec{n}(\vec{r})dS$ пропорційно перепаду температур $u'_{\vec{n}}(\vec{r})$ (закон Фур'є) і, зрозуміло, величині площі dS

$$dQ = -k \cdot u'_{\vec{n}}(\vec{r}) \cdot dS = -k\left(\mathrm{grad}\,u(\vec{r}),\ \vec{n}(\vec{r})\right)dS = -k\left(\mathrm{grad}\,u(\vec{r}),\ d\vec{S}\right)$$

де k - коефіцієнт теплопровідності, який у випадку ізотропного однорідного середовища є $k = const$. Отже, кількість тепла, що випливає через поверхню S_ε в зовнішність пропорційно **потоку градієнта** поля температур

$$Q_\varepsilon = \oiint\limits_{S_\varepsilon} dQ = -k \oiint\limits_{S_\varepsilon} \left(\mathrm{grad}\,u(\vec{r}),\ d\vec{S}\right)$$

Таким чином,

$$-k \oiint\limits_{S_\varepsilon} \left(\mathrm{grad}\,u(\vec{r}),\ d\vec{S}\right) = \iiint\limits_{V_\varepsilon} f(\vec{r})dV$$

Застосовуючи формулу Гаусса-Остроградского (“ про лапласиане”), одержимо

$$-k \iiint\limits_{V_\varepsilon} \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,u(\vec{r})\,dV = \iiint\limits_{V_\varepsilon} f(\vec{r})dV$$

У силу довільності об'єму V_ε, приходимо до рівності подынтегральных виражень

$$\boxed{-k\,\Delta u(\vec{r}) = f(\vec{r})}$$

называемом **стационарным уравнением распределение тепла**.

Зауваження. Стаціонарні рівняння розподілу тепла називаються

- неоднорідне - $\Delta u(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$ рівнянням **Пуассона**
- однорідне - $\Delta u(\mathbf{r}) = 0$ рівнянням **Лапласа**

Зауваження. Конкретний розподіл температури $u(\mathbf{r})$ усередині тіла V, мабуть, залежить не тільки від інтенсивності внутрішніх джерел $f(\mathbf{r})$, але й від температурного режиму на границі S_V. Типовими є

- задача **Дирихле** $u(\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{r}\in S_V} = g(\mathbf{r})$

  коли в кожній крапці границі підтримується задана температура

- задача **Неймана** $u'_{\mathbf{n}}(\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{r}\in S_V} = g(\mathbf{r})$

  коли в кожній крапці границі заданий тепловий потік

У випадку задачі **Дирихле** інтенсивність джерел тепла $f(\mathbf{r})$ й підтримувана на границі температура $g(\mathbf{r})$ не зв'язано один з одним (довільні). При цьому розв'язок рівняння Пуассона (зокрема, Лапласа), як це випливає з фізичних міркувань, очевидно (?!), єдине.

У випадку задачі **Неймана**, природно, що повинне виконуватися вимога: скільки тепла виділяється усередині об'єму V, стільки ж його випливає в зовнішній простір, так що між інтенсивністю джерел тепла $f(\mathbf{r})$ й величиною потоку $g(\mathbf{r})$ через границю повинен бути збережений баланс

$$\oiint_{S_V} g(\mathbf{r})\,dS = \iiint_V f(\mathbf{r})\,dV$$

При цьому розв'язок рівняння Пуассона (зокрема, Лапласа) не єдино, а визначається з точністю до $const$. Дійсно, якщо $u_1(\mathbf{r})$, $u_2(\mathbf{r})$ два розв'язки, то різниця $u(\mathbf{r}) = u_1(\mathbf{r}) - u_2(\mathbf{r})$ є розв'язок однорідної задачі Неймана

$$\begin{cases} \Delta u(\mathbf{r}) = 0 \\ u'_{\mathbf{n}}(\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{r}\in S_V} = 0 \end{cases}$$

т.е. являє собою розподіл температури $u(\mathbf{r})$ усередині теплоізольованого з "боків" тіла й позбавленого внутрішніх джерел тепла, так що з фізичних міркувань, очевидно (?!),

$$u(\mathbf{r}) = const$$

Зауваження. З першої формули Гріна при $f(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r})$ випливає

$$\oiint_{S_+} u(\mathbf{r})\,\underset{\substack{\backslash\backslash \\ 0}}{u'_{\mathbf{n}}(\mathbf{r})}\,dS = \iiint_{V_S} u(\mathbf{r})\,\underset{\substack{\backslash\backslash \\ 0}}{\Delta u(\mathbf{r})}\,dV + \iiint_{V_S} \left|\nabla u(\mathbf{r})\right|^2 dV \quad\Rightarrow\quad \iiint_{V_S} \left|\nabla u(\mathbf{r})\right|^2 dV = 0$$

$$\left|\nabla u(\mathbf{r})\right| = 0 \quad\Rightarrow\quad u(\mathbf{r}) = const$$

11. Потенційні векторні поля

У якості визначення **потенційного** в об'ємі V векторного поля $\vec{F}_P(\vec{r})$ може бути прийняте кожне з наступних еквівалентних умов

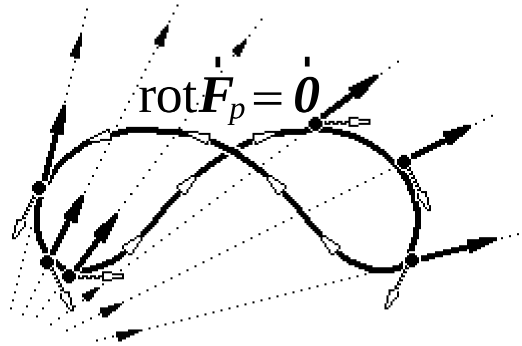
- $\oint\limits_L \left(\vec{F}_P(\vec{r}),\, d\vec{L} \right) = 0 \qquad \forall L \subset V$

- $\int\limits_{L_{AB}} \left(\vec{F}_P(\vec{r}),\, d\vec{L} \right) = const \quad A \xrightarrow{\forall L} B$

- $\operatorname{rot} \vec{F}_P(\vec{r}) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{rot}\operatorname{grad} f(\vec{r}) = \vec{0}}$$

- $\vec{F}_P(\vec{r}) = \operatorname{grad} f(\vec{r})$



Зауваження. Умова $\operatorname{rot} \vec{F}_P(\vec{r}) = \vec{0}$ рівносильна іншим **тільки** в об'ємах V **поверхово** зв'язкових, тобто коли будь-який замкнений контур можна стягти в крапку, залишаючись в V (описуючи при цьому деяку поверхня $S_L \subset V$)

Скалярне поле $f(\vec{r})$ називається **потенціалом** (скалярним) векторного поля $\vec{F}_P(\vec{r})$ й визначається з точністю до $const$.

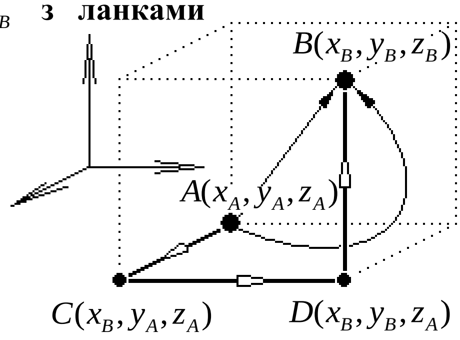
Робота потенційного поля **не залежить** від форми L шляху, визначаючись тільки граничними крапками A й B кривої L_{AB}, і дорівнює різниці потенціалів

$$\int\limits_{L_{AB}} \left(\vec{F}_P(\vec{r}),\, d\vec{L} \right) = \int\limits_A^B \left(\vec{F}_P(\vec{r}),\, d\vec{L} \right) = f(B) - f(A)$$

Для її знаходження зручно побрати ламану L_{ACDB} з ланками

$$L_{AC} \parallel Ox \qquad L_{CD} \parallel Oy \qquad L_{DB} \parallel Oz$$

$$\int\limits_{(x_A, y_A, z_A)}^{(x_B, y_B, z_B)} = \int\limits_{(x_A, y_A, z_A)}^{(x_B, y_B, z_B)} x + \int\limits_{(x_A, y_A, z_A)}^{(x_B, y_B, z_B)} y + \int\limits_{(x_A, y_A, z_A)}^{(x_B, y_B, z_B)} z =$$



$$= \int\limits_{x_A}^{x_B} P(x, y_A, z_A)dx + \int\limits_{y_A}^{y_B} Q(x_B, y, z_A)dy + \int\limits_{z_A}^{z_B} R(x_B, y_B, z)dz$$

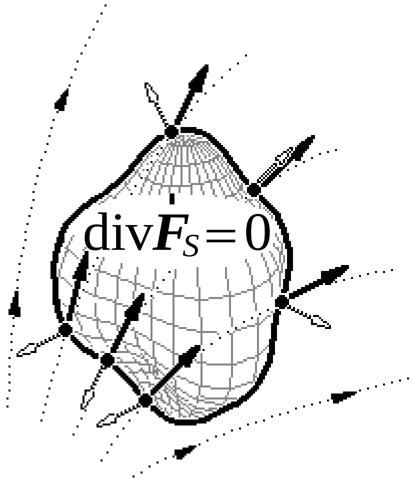
Зафіксувавши початкову крапку, наприклад $(x_A,\ y_A,\ z_A) = (0,\ 0,\ 0)$, і залишивши кінцеву довільної $(x_B,\ y_B,\ z_B) = (x,\ y,\ z)$, знайдемо один з потенціалів

$$f(x, y, z) = \int\limits_0^x P(x,\ 0,\ 0)dx + \int\limits_0^y Q(x,\ y,\ 0)dy + \int\limits_0^z R(x,\ y,\ z)dz$$

Соленоидальные векторні поля

У якості визначення **соленоидального** в об'ємі V векторного поля $\vec{F}_S(\vec{r})$ може бути прийняте кожне з наступних еквівалентних умов

- $\oiint\limits_S \left(\vec{F}_S(\vec{r}),\, d\vec{S}\right) = 0 \qquad \forall S \subset V$



- $\iint\limits_{S_L} \left(\vec{F}_S(\vec{r}),\, d\vec{S}\right) = const \qquad \forall S$

- $\mathrm{div}\,\vec{F}_S(\vec{r}) = 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{div\,rot}\,\vec{F}(\vec{r}) = 0}$$

- $\vec{F}_S(\vec{r}) = \mathrm{rot}\,\vec{G}(\vec{r})$

Зауваження. Умова $\mathrm{div}\,\vec{F}_S(\vec{r}) = 0$ рівносильна іншим **тільки** в об'ємах V **об'ємно** зв'язкових, тобто коли будь-яку замкнену поверхню можна стягти в крапку, залишаючись в. V

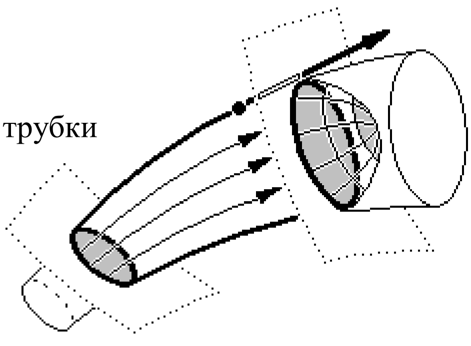
Векторне поле $\vec{G}(\vec{r})$ називається **векторним потенціалом** векторного поля $\vec{F}_S(\vec{r})$ й визначається з точністю до градієнта $\mathrm{grad}\, f(\vec{r})$ деякого скалярного поля (тобто з точністю до потенційного поля).

Потік соленоидального поля **не залежить** від форми S поверхні, визначаючись тільки границею L поверхні S_L, і дорівнює циркуляції векторного потенціалу по L

$$\iint\limits_{S_L} \left(\vec{F}_S(\vec{r}),\, d\vec{S}\right) = \oint\limits_L \left(\vec{G}(\vec{r}),\, d\vec{L}\right)$$

Більше того, потік через будь-який перетин векторної трубки

$$\iint\limits_S \left(\vec{F}_S(\vec{r}),\, d\vec{S}\right) = const$$



Звідси випливає, що векторні трубки (іноді говорять про векторні лінії) не можуть не починатися, не кінчатися усередині поля, тобто вони або замкнені, або мають кінці на границі поля, або мають нескінченні галузей.

Лапласовы векторні поля

1° **Потенційне** й **соленоидальное** векторне поле $\vec{F}_L(\vec{r})$ називається **лапласовым**

З ланцюжка еквівалентних умов (якщо об'єм V - **об'ємно** й **поверхово** зв'язний)

$$\left[\begin{array}{l} \oint\limits_L \left(\vec{F}_L(\vec{r}),\ d\vec{L}\right) = 0 \\ \oiint\limits_S \left(\vec{F}_L(\vec{r}),\ d\vec{S}\right) = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{F}_L(\vec{r}) = \vec{0} \\ \operatorname{div} \vec{F}_L(\vec{r}) = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \vec{F}_L(\vec{r}) = \operatorname{grad} f(\vec{r}) \\ \vec{F}_L(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{G}(\vec{r}) \end{array}\right.$$

випливає, що лапласово поле є градієнтом **гармонійної** функції

$$\vec{F}_L(\vec{r}) = \operatorname{grad} f(\vec{r}), \qquad \text{де} \qquad \operatorname{div} \operatorname{grad} f(\vec{r}) = \Delta f(\vec{r}) = 0$$

Теорема

Будь-яке векторне поле $\vec{F}(\vec{r})$ допускає розкладання в суму **потенційного** й **соленоидального** полів

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}_P(\vec{r}) + \vec{F}_S(\vec{r}) = \left(\vec{F}_P(\vec{r}) + \vec{F}_L(\vec{r})\right) + \left(\vec{F}_S(\vec{r}) - \vec{F}_L(\vec{r})\right)$$

Це розкладання єдине з точністю до **лапласова** поля

2° В багатьох питаннях електродинаміки й гідродинаміки часто зустрічаються задачі про відновлення векторного поля $\vec{F}$ по наперед заданим **дивергенції** й **ротору**

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{F} = q \\ \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{j} \end{array}\right.$$

На відміну від скалярного поля q векторне поле $\vec{j}$ не може бути зовсім довільним

$$\operatorname{div} \vec{j} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0$$

З ланцюжка еквівалентних умов

$$\left[\begin{array}{llll} \operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{j} = \operatorname{rot} \vec{G} & & & \\ \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{j} & \Leftrightarrow \quad \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{j} = \operatorname{rot} \vec{G} & \Leftrightarrow \quad \vec{F} = \vec{G} + \operatorname{grad} f & \\ \operatorname{div} \vec{F} = q & & & \Leftrightarrow \quad \operatorname{div}(\vec{G} + \operatorname{grad} f) = q \end{array}\right.$$

випливає, що поставлена задача зводиться до розв'язку рівняння Пуассона

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f = q - \operatorname{div} \vec{G} = p \quad \Leftrightarrow \quad \Delta f = p$$

Зауваження. У випадку обмеженої області V додаткове завдання на границі S_V нормальної складової відновлюваного поля забезпечує його одиничність

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{F} = q \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{j} & \qquad \left(\operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0 \right) \\ \left(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{n} \right)\Big|_{\boldsymbol{r} \in S_V} = g & \qquad \left(\oiint\limits_{S_V} g\, dS = \iiint\limits_{V} q\, dV \right) \end{cases}$$

Дійсно, якщо $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ два розв'язки, то різниця $\boldsymbol{F}_L = \boldsymbol{F}_1 - \boldsymbol{F}_2$ являє собою лапласово поле, "ковзне" уздовж границі

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{F}_L = 0 \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{F}_L = \boldsymbol{0} \\ \left(\boldsymbol{F}_L, \boldsymbol{n} \right)\Big|_{\boldsymbol{r} \in S_V} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{F}_L(\boldsymbol{r}) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{r}), \qquad \textit{где} \qquad \begin{cases} \Delta f(\boldsymbol{r}) = 0 \\ f'_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r})\Big|_{\boldsymbol{r} \in S_V} = 0 \end{cases}$$

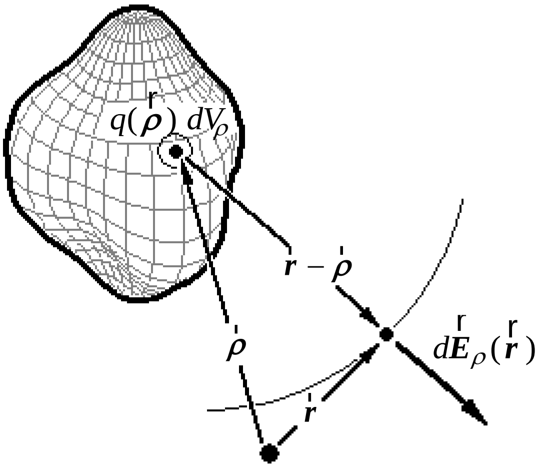
Оскільки розв'язком однорідної задачі Неймана є тільки $f(\boldsymbol{r}) \equiv const$, те

$$\boldsymbol{F}_L(\boldsymbol{r}) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{r}) = \nabla const = \boldsymbol{0}, \qquad \forall \boldsymbol{r} \in V$$

Електростатичне поле

Згідно із законом **Кулона** елементарний заряд $q(\vec{\rho})\,dV_\rho$, що перебуває в крапці $\vec{\rho}$ з “сферичним об'ємом” dV_ρ і щільністю $q(\vec{\rho})$, створює в крапці $\vec{r}$ елементарне електростатичне поле з напруженістю

$$d\vec{E}_\rho(\vec{r}\,) = q(\vec{\rho}\,)\,\frac{\vec{r}-\vec{\rho}}{|\vec{r}-\vec{\rho}\,|^3}\,dV_\rho$$



так що сумарне поле в крапці $\vec{r}$ рівно

$$\vec{E}(\vec{r}\,) = \iiint\limits_V q(\vec{\rho}\,)\,\frac{\vec{r}-\vec{\rho}}{|\vec{r}-\vec{\rho}\,|^3}\,dV_\rho$$

Знайдемо **дивергенцію** електростатичного поля

$$\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r}_0) = \lim_{V_\varepsilon\to\vec{r}_0}\frac{\displaystyle\oint\!\!\!\oint\limits_{S_\varepsilon}\big(\vec{n}(\vec{r}\,),\,\vec{E}(\vec{r}\,)\big)dS_r}{|V_\varepsilon|}$$

Маємо

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{S_\varepsilon}\big(\vec{n}(\vec{r}\,),\,\vec{E}(\vec{r}\,)\big)\,dS_r =$$

$$= \oint\!\!\!\oint\limits_{S_\varepsilon}\Big(\vec{n}(\vec{r}\,),\,\iiint\limits_V q(\vec{\rho}\,)\,\frac{\vec{r}-\vec{\rho}}{|\vec{r}-\vec{\rho}\,|^3}\,dV_\rho\Big)\,dS_r = \iiint\limits_{(V\backslash V_\varepsilon)\cup V_\varepsilon} q(\vec{\rho}\,)\underbrace{\oint\!\!\!\oint\limits_{S_\varepsilon}\frac{\big(\vec{n}(\vec{r}\,),\,\vec{r}-\vec{\rho}\,\big)}{|\vec{r}-\vec{\rho}\,|^3}\,dS_r}_{\begin{cases}0, & \vec{\rho}\notin V_\varepsilon\\ 4\pi, & \vec{\rho}\in V_\varepsilon\end{cases}}\,dV_\rho =$$

$$= \iiint\limits_{V\backslash V_\varepsilon} q(\vec{\rho}\,)\cdot 0\;dV_\rho + \iiint\limits_{V_\varepsilon} q(\vec{\rho}\,)\cdot 4\pi\;dV_\rho = 4\pi q(\vec{\xi}\,)\,|V_\varepsilon| \qquad \big(\vec{\xi}\in V_\varepsilon\big)$$

“Розширюючи” об'єм V з $q(\vec{\rho}\,)\equiv 0$, завжди можна вважати крапку, що $\vec{r}_0$ перебуває усередині V

Отже,

$$\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r}_0) = \lim_{V_\varepsilon\to\vec{r}_0}\frac{4\pi q(\vec{\xi}\,)|V_\varepsilon|}{|V_\varepsilon|} = 4\pi q(\vec{r}_0)$$

Знайдемо **ротор** електростатичного поля

$$\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r}_0)=\lim_{V_\varepsilon\to\vec{r}_0}\frac{\displaystyle\oiint_{S_\varepsilon}\left[\,\vec{n}(\vec{r}),\ \vec{E}(\vec{r})\,\right]dS_r}{\left|V_\varepsilon\right|}$$

Маємо

$$\oiint_{S_\varepsilon}\left[\,\vec{n}(\vec{r}),\ \vec{E}(\vec{r})\,\right]dS_r\ =$$

$$=\oiint_{S_\varepsilon}\left[\,\vec{n}(\vec{r}),\ \iiint_V q(\vec{\rho})\,\frac{\vec{r}-\vec{\rho}}{|\vec{r}-\vec{\rho}|^3}\,dV_\rho\,\right]dS_r\ =\iiint_V q(\vec{\rho})\,\underbrace{\oiint_{S_\varepsilon}\frac{\left[\,\vec{n}(\vec{r}),\ \vec{r}-\vec{\rho}\,\right]}{|\vec{r}-\vec{\rho}|^3}\,dS_r}_{\vec{0},\ \ \forall\vec{\rho}}\ dV_\rho$$

Отже,

$$\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r}_0)=0$$

Отримані значення **div** й **rot** напруженості $\vec{E}(\vec{r})$ називаються диференціальними рівняннями електростатичного поля, рівносильні інтегральним

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r})\,=\,4\pi q(\vec{r})\\[2ex]\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r})\,=\,\vec{0}\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad\left[\begin{array}{l}\displaystyle\oiint_S\left(\vec{E}(\vec{r}),\ d\vec{S}\right)=\left(\ \iiint_{V_S}\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r})\,dV\ \right)=4\pi\iiint_{V_S}q(\vec{r})\,dV\\[2ex]\displaystyle\oint_L\left(\vec{E}(\vec{r}),\ d\vec{L}\right)=\left(\ \iint_{S_L}\left(\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r}),d\vec{S}\right)\right)=\ 0\end{array}\right.$$

що представляють собою відомі з досвіду **закони електростатичного поля**

1) **(Закон Гаусса) Потік електростатичного поля через замкнену поверхню рівний охоплюваному поверхнею заряду, помноженому на** 4π
2) **(Незалежність роботи від форми шляху)**
   Циркуляція електростатичного поля по замкненому контуру дорівнює нулю

З умови $\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r})=\vec{0}$ випливає **потенційність** електростатичного поля. Знайдемо його **скалярний потенціал** $\vec{E}(\vec{r})=-\operatorname{grad}\varphi(\vec{r})$

$$\vec{E}(\vec{r})=\iiint_V q(\vec{\rho})\,\frac{\vec{r}-\vec{\rho}}{|\vec{r}-\vec{\rho}|^3}\,dV_\rho=-\iiint_V\nabla_r\,\frac{q(\vec{\rho})}{|\vec{r}-\vec{\rho}|}\,dV_\rho=-\ \nabla_r\iiint_V\frac{q(\vec{\rho})}{|\vec{r}-\vec{\rho}|}\,dV_\rho$$

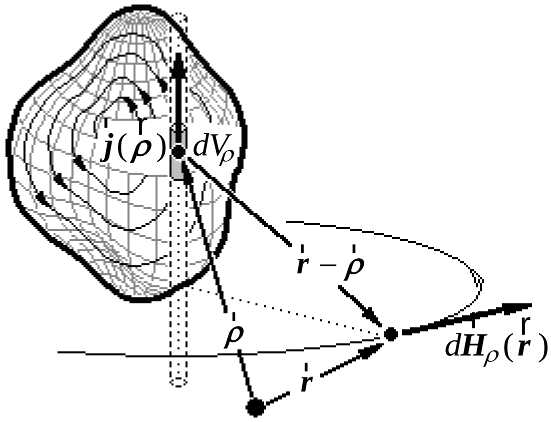
$\Rightarrow$

$$\vec{E}(\vec{r})=-\operatorname{grad}\iiint_V\frac{q(\vec{\rho})}{|\vec{r}-\vec{\rho}|}\,dV_\rho\qquad\Rightarrow\qquad\varphi(\vec{r})=\iiint_V\frac{q(\vec{\rho})}{|\vec{r}-\vec{\rho}|}\,dV_\rho$$

Магнитостатическое поле

Згідно із законом Био-Савара-**Лапласа** елементарний струм $\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{\rho}})\,dV_\rho$, що перебуває в крапці $\vec{\boldsymbol{\rho}}$ з “циліндричним об'ємом” dV_ρ векторної трубки й щільністю струму $\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{\rho}}) = q(\vec{\boldsymbol{\rho}})\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{\rho}})$ ($q(\vec{\boldsymbol{\rho}})$ - щільність $\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{\rho}})$ зарядів, що рухаються зі швидкістю) $\vec{\boldsymbol{r}}$ створює в крапці елементарне магнітне поле з напруженістю

$$d\vec{\boldsymbol{H}}_\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = \left[\,\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{\rho}}),\ \frac{\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{\rho}}}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{\rho}}|^3}\right] dV_\rho$$



так що сумарне поле, створюване безупинно циркулюючим в об'ємі V стаціонарним струмом із щільністю $\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{\rho}})$

$$\left(\nabla,\ \vec{\boldsymbol{j}}\,\right)\Big|_V = \left(\vec{\boldsymbol{n}},\ \vec{\boldsymbol{j}}\,\right)\Big|_{S_V} = 0$$

у крапці $\vec{\boldsymbol{r}}$ рівно

$$\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \iiint\limits_V \frac{\left[\,\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{\rho}}),\ \vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{\rho}}\,\right]}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{\rho}}|^3}\,dV_\rho$$

Знайдемо **дивергенцію** магнитостатического поля

$$\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}}_0) = \lim_{V_\varepsilon\to\vec{\boldsymbol{r}}_0}\frac{\oiint\limits_{S_\varepsilon}\left(\vec{\boldsymbol{n}}(\vec{\boldsymbol{r}}),\ \vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}})\right)dS_r}{\left|V_\varepsilon\right|}$$

Маємо

$$\oiint\limits_{S_\varepsilon}\left(\vec{\boldsymbol{n}}(\vec{\boldsymbol{r}}),\ \vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}})\right)dS_r =$$

$$= \oiint\limits_{S_\varepsilon}\left(\vec{\boldsymbol{n}}(\vec{\boldsymbol{r}}),\ \iiint\limits_V \frac{\left[\,\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{\rho}}),\ \vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{\rho}}\,\right]}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{\rho}}|^3}\,dV_\rho\right)dS_r = \oiint\limits_{S_\varepsilon}\iiint\limits_V \frac{\left(\vec{\boldsymbol{n}}(\vec{\boldsymbol{r}}),\ \left[\,\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{\rho}}),\ \vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{\rho}}\,\right]\right)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{\rho}}|^3}\,dV_\rho\,dS_r =$$

$$= -\iiint\limits_V\oiint\limits_{S_\varepsilon}\frac{\left(\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{\rho}}),\ \left[\,\vec{\boldsymbol{n}}(\vec{\boldsymbol{r}}),\ \vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{\rho}}\,\right]\right)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{\rho}}|^3}\,dS_r\,dV_\rho = -\iiint\limits_V\left(\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{\rho}}),\ \underbrace{\oiint\limits_{S_\varepsilon}\frac{\left[\,\vec{\boldsymbol{n}}(\vec{\boldsymbol{r}}),\ \vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{\rho}}\,\right]}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{\rho}}|^3}\,dS_r}_{\vec{\boldsymbol{0}},\quad\forall\vec{\boldsymbol{\rho}}}\right)dV_\rho = 0$$

Отже,

$$\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}}_0) = 0$$

Знайдемо **ротор** магнитостатического поля

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}_0)=\lim_{V_\varepsilon\to\boldsymbol{r}_0}\frac{\oint\!\!\oint_{S_\varepsilon}\left[\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}),\,\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\right]dS_r}{|V_\varepsilon|}$$

Маємо

$$\oint\!\!\oint_{S_\varepsilon}\left[\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}),\,\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\right]dS_r=$$

$$=\oint\!\!\oint_{S_\varepsilon}\left[\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}),\,\iiint_V\frac{\left[\boldsymbol{j}(\boldsymbol{\rho}),\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\rho}\right]}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\rho}|^3}\,dV_\rho\right]dS_r=\oint\!\!\oint_{S_\varepsilon}\iiint_V\frac{\left[\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}),\left[\boldsymbol{j}(\boldsymbol{\rho}),\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\rho}\right]\right]}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\rho}|^3}\,dV_\rho\;dS_r=\to$$

Розкриваючи подвійні векторні добутки й одержавши зв'язок між ними

$$\left[\boldsymbol{n},\left[\boldsymbol{j},\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\rho}\right]\right]=\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{n},\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\rho}\right)-(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\rho})\left(\boldsymbol{n},\,\boldsymbol{j}\right)$$

$$\left[\boldsymbol{j},\left[\boldsymbol{n},\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\rho}\right]\right]=\boldsymbol{n}\left(\boldsymbol{j},\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\rho}\right)-(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\rho})\left(\boldsymbol{j},\,\boldsymbol{n}\right)$$

$\Rightarrow$

$$\left[\boldsymbol{n},\left[\boldsymbol{j},\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\rho}\right]\right]=\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\rho}\right)+\left[\boldsymbol{j},\left[\boldsymbol{n},\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\rho}\right]\right]-\boldsymbol{n}\left(\boldsymbol{j},\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\rho}\right)$$

перейдемо до розгляду трьох відповідних інтегралів

$$a)\to=\oint\!\!\oint_{S_\varepsilon}\iiint_V\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{\rho})\left(\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}),\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\rho}\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\rho}|^3}\,dV_\rho\,dS_r=\iiint_{(V\setminus V_\varepsilon)\cup V_\varepsilon}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{\rho})\underbrace{\oint\!\!\oint_{S_\varepsilon}\frac{\left(\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}),\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\rho}\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\rho}|^3}dS_r}_{\left[\begin{array}{ll}0, & \boldsymbol{\rho}\notin V_\varepsilon\\ 4\pi, & \boldsymbol{\rho}\in V_\varepsilon\end{array}\right.}\,dV_\rho=$$

$$=\iiint_{V\setminus V_\varepsilon}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{\rho})\cdot 0\;dV_\rho+\iiint_{V_\varepsilon}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{\rho})\cdot 4\pi\;dV_\rho=4\pi\boldsymbol{j}(\boldsymbol{\xi})\,|V_\varepsilon|\qquad\left(\boldsymbol{\xi}\in V_\varepsilon\right)$$

“Розширюючи” об'єм V з $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{\rho})\equiv 0$, завжди можна вважати крапку, що $\boldsymbol{r}_0$ перебуває усередині V

$$=\iiint_{V\setminus V_\varepsilon}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{\rho})\cdot 0\;dV_\rho+\iiint_{V_\varepsilon}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{\rho})\cdot 4\pi\;dV_\rho=4\pi\boldsymbol{j}(\boldsymbol{\xi})\,|V_\varepsilon|\qquad\left(\boldsymbol{\xi}\in V_\varepsilon\right)$$

$$b)\to=\oiint_{S_\varepsilon}\iiint_V \frac{\left[\vec{j}(\vec{\rho}),\ \left[\vec{n}(\vec{r}),\ \vec{r}-\vec{\rho}\right]\right]}{|\vec{r}-\vec{\rho}|^3}\,dV_\rho\, dS_r=\iiint_V\Big[\vec{j}(\vec{\rho}),\ \underbrace{\oiint_{S_\varepsilon}\frac{\left[\vec{n}(\vec{r}),\vec{r}-\vec{\rho}\right]}{|\vec{r}-\vec{\rho}|^3}\,dS_r}_{\vec{0},\ \ \forall\vec{\rho}}\Big]\,dV_\rho=\vec{0}$$

$$c)\to=\oiint_{S_\varepsilon}\iiint_V \frac{\vec{n}(\vec{r})\left(\vec{j}(\vec{\rho}),\ \vec{r}-\vec{\rho}\right)}{|\vec{r}-\vec{\rho}|^3}\,dV_\rho\, dS_r=\oiint_{S_\varepsilon}\vec{n}(\vec{r})\iiint_V\left(\vec{j}(\vec{\rho}),\ \nabla_\rho\frac{1}{|\vec{r}-\vec{\rho}|}\right)dV_\rho\, dS_r=\vec{0}$$

Останнє випливає з інтегральної формули, що зв'язує щільність струму $\vec{j}$, що циркулює в об'ємі V, з деяким довільним скалярним полем f

$$0=\oiint_{S_V}\big(\underbrace{\vec{n},\ \vec{j}}_{0}\cdot f\big)dS=\iiint_V\left(\nabla,\ \vec{j}\cdot f\right)dV=\iiint_V\Big(\big(\underbrace{\nabla,\ \vec{j}}_{0}\big)\cdot f+\left(\nabla f,\ \vec{j}\right)\Big)dV=\iiint_V\left(\vec{j},\ \nabla f\right)dV$$

До речі, уважаючись $f=\left(\vec{c},\ \vec{r}\right)\ \Rightarrow\ \nabla f=\vec{c}$, одержуємо, що повний струм $\iiint_V \vec{j}\ dV=\vec{0}$

Отже,

$$\operatorname{rot}\vec{H}(\vec{r}_0)=\lim_{V_\varepsilon\to\vec{r}_0}\frac{4\pi\vec{j}(\vec{\xi})\,|V_\varepsilon|}{|V_\varepsilon|}=4\pi\vec{j}(\vec{r}_0)$$

Отримані значення **div** й **rot** напруженості $\vec{H}(\vec{r})$ називаються диференціальними рівняннями магнитостатического поля, рівносильні інтегральним

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{div}\vec{H}(\vec{r})=0\\[2ex] \operatorname{rot}\vec{H}(\vec{r})=4\pi\vec{j}(\vec{r})\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad\left[\begin{array}{l}\oiint_S\left(\vec{H}(\vec{r}),\ d\vec{S}\right)=\left(\iiint_{V_S}\operatorname{div}\vec{H}(\vec{r})\,dV\right)=0\\[2ex] \oint_L\left(\vec{H}(\vec{r}),\ d\vec{L}\right)=\left(\iint_{S_L}\left(\operatorname{rot}\vec{H}(\vec{r}),d\vec{S}\right)\right)=4\pi\iint_{S_L}\left(\vec{j}(\vec{r}),\ d\vec{S}\right)\end{array}\right.$$

що представляють собою відомі з досвіду **закони магнитостатического поля**

1) **(Відсутність магнітних зарядів)**
   Потік магнитостатического поля через замкнену поверхню дорівнює нулю
2) **(Закон Ампера) Циркуляція магнитостатического поля по замкненому контуру рівна охоплюваному контуром струму, помноженому на** 4π

З умови $\operatorname{div}\vec{H}(\vec{r})=0$ випливає **соленоидальность** магнитостатического поля. Знайдемо його **векторний потенціал** $\vec{H}(\vec{r})=\operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r})$

$$\vec{H}(\vec{r})=\iiint_V\frac{\left[\vec{j}(\vec{\rho}),\ \vec{r}-\vec{\rho}\right]}{|\vec{r}-\vec{\rho}|^3}\,dV_\rho=\iiint_V\left[\nabla_r,\ \frac{\vec{j}(\vec{\rho})}{|\vec{r}-\vec{\rho}|}\right]dV_\rho=\left[\nabla_r,\ \iiint_V\frac{\vec{j}(\vec{\rho})}{|\vec{r}-\vec{\rho}|}\,dV_\rho\right]$$

$\Rightarrow$

$$\vec{H}(\vec{r})=\operatorname{rot}\iiint_V\frac{\vec{j}(\vec{\rho})}{|\vec{r}-\vec{\rho}|}\,dV_\rho\quad\Rightarrow\quad\vec{A}(\vec{r})=\iiint_V\frac{\vec{j}(\vec{\rho})}{|\vec{r}-\vec{\rho}|}\,dV_\rho$$