1804

Харківський національний університет
імені В.Н. Каразіна

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Міністерство освіти і науки,
молоді та спорту України

Харківський
національний
університет
імені В. Н. Каразіна

Н. Д. Парфьонова

КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ

Харків – 2014

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Н.Д. Парфьонова

КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ

Напчальний посібник

Харків – 2014

УДК 517.53(075.8)
ББК 22.161.5я73
П 18

Утверждено на заседании Научно-методического совета Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина (протокол № 2 от 14.12.2011).

Рецензенти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Фаворов Сергей Юрьевич,
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,
заведующий кафедрой теории функций и
функционального анализа

кандитат физико-математических наук, доцент
Удодова Ольга Ігорівна,
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,
кафедра высшей математики физического факультета

П 18 **Парфьонова Н. Д.** Комплексний аналіз: навчально-методичний посібник. – Х.: ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2014. – 136 с.

У посібнику розглядаються типові задачи курсу комплексного аналізу, який вивчається у 4 семестрі студентами 2 курсу фізичного й радіофізичного факультетів Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Матеріал розділений на 13 розділів, кожний з яких відповідає одному практичному заняттю. Особлива увага приділена техніці практичних обчислень. Кожна тема має завдання для аудиторної і домашньої роботи студентів.

УДК 517.53(075.8)
ББК 22.161.5я73

ЗМІСТ

2. Комплексні числа

2.1. Арифметичні дії над комплексними числами

Комплексним числом z називається вираз

$$z = x + iy,$$

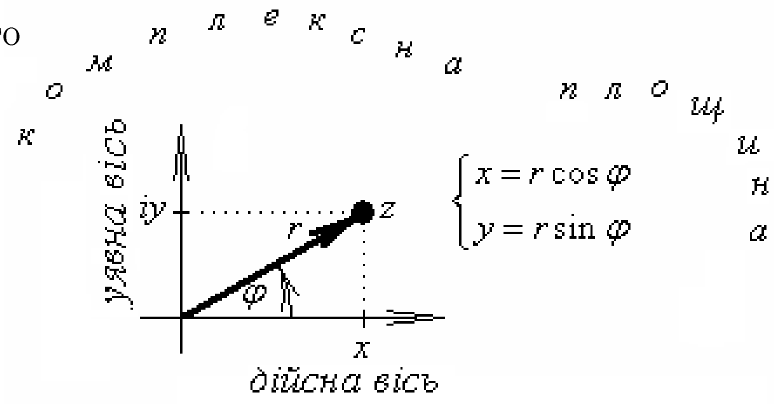
де x і y – дійсні числа, а i – уявна одиниця, тобто число, квадрат якого дорівнює мінус один,

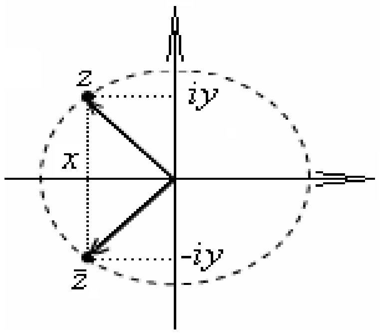
$$i^2 = -1.$$

Два комплексні числа $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ дорівнюють одне одному тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2$ та $y_1 = y_2$.

Множина $\mathbb{C}$ усіх комплексних чисел є розширенням множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ зі збереженням усіх властивостей арифметичних операцій шляхом приєднання нового числа – уявної одиниці i.

Геометричною інтерпретацією комплексного числа z є точка на площині (або радіус-вектор цієї точки).





Число $\overline{z} = x - iy$ називається *комплексно спряженим* числу $z = x + iy$.

$$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2 = r^2,$$

$$z + \overline{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2 \operatorname{Re} z,$$

$$z - \overline{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy = 2i \operatorname{Im} z.$$

Арифметичні операції над комплексними числами зводяться до звичного розкриття дужок і зведення подібних доданків, зважаючи на те, що $i^2 = -1$:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)\,,$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2)\,,$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot iy_2 + iy_1 \cdot x_2 + \\ + iy_1 \cdot iy_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(y_1 x_2 + x_1 y_2)\,,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot iy_2 + iy_1 \cdot x_2 - iy_1 \cdot iy_2}{(x_2)^2 - (iy_2)^2} =$$
$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad z_2 \neq 0.$$

Геометрічний зміст операцій додавання та віднімання полягає в тому, що комплексні числа додаються та віднімаються таким же чином, як і вектори.

Для будь-яких двох комплексних чисел z_1 та z_2 можна довести нерівність трикутника

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Приклад 2.1. *Виконати арифметичні дії над комплексними числами:* $z_1 = -4 - 3i, \quad z_2 = -1 + 2i.$

$$z_1 + z_2 = (-4 - 3i) + (-1 + 2i) = (-4 + (-1)) + i(-3 + 2) = -5 - i.$$
$$z_1 - z_2 = (-4 - 3i) - (-1 + 2i) = (-4 - (-1)) + i(-3 - 2) = -3 - 5i.$$
$$z_1 \cdot z_2 = (-4 - 3i)(-1 + 2i) = 4 - 8i + 3i - 6i^2 = (4 + 6) +$$
$$+ i(-8 + 3) = 10 - 5i.$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{-4 - 3i}{-1 + 2i} = \frac{(-4 - 3i)(-1 - 2i)}{(-1 + 2i)(-1 - 2i)} = \frac{4 + 11i + 6i^2}{1 - 4i^2} =$$
$$= \frac{-2 + 11i}{5} = -\frac{2}{5} + i\frac{11}{5}.$$

Приклад 2.2.

1) *Обчислити* $i^n, n \in \mathbb{N}.$

$i^1 = i;\ i^2 = -1;\ i^3 = i^2 \cdot i = -i;\ i^4 = (i^2)^2 = 1;$
$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i;\ \ldots$

Таким чином, існує всього 4 різні значення степеня i^n :

$$i^n = \left[\begin{array}{rl} i, & n = 4k + 1, \\ -1, & n = 4k + 2, \\ -i, & n = 4k + 3, \\ 1, & n = 4k, \end{array} \right. \quad k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}.$$

Наприклад, $i^{2005} = i^{2004+1} = i^{4 \cdot 501 + 1} = (i^4)^{501} \cdot i^1 = 1^{501} \cdot (i) = i.$

2) *Обчислити* $\mathrm{Re}\dfrac{(1-3i)^2-(1+i^9)^3}{(1+i^{21})^3-(2-i)^3}$.

$$\begin{aligned}
(1-3i)^2 &= 1^2-2\cdot 1\cdot 3i+(3i)^2 = 1-6i-9=-8-6i,\\
(1+i^9)^3 &= (1+(i^2)^4 i)^3 = (1+i)^3 = 1+3i+3i^2+i^3 =\\
&= 1+3i-3-i=-2+2i,\\
(1+i^{21})^3 &= (1+(i^2)^{10} i)^3 = (1+i)^3 = 1+3i+3i^2+i^3 =\\
&= 1+3i-3-i=-2+2i,\\
(2-i)^3 &= 2^3-3\cdot 2^2 i+3\cdot 2i^2-i^3 = 8-12i-6+i=2-11i.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1-3i)^2-(1+i^9)^3 &= (-8-6i)-(-2+2i) = -6-8i,\\
(1+i^{21})^3-(2-i)^3 &= (-2+2i)-(2-11i) = -4+13i.\\
\frac{(1-3i)^2-(1+i^9)^3}{(1+i^{21})^3-(2-i)^3} &= \frac{6+8i}{4-13i} = \frac{(6+8i)\cdot(4+13i)}{(4-13i)\cdot(4+13i)} =\\
&= \frac{(6\cdot 4-8\cdot 13)+i(6\cdot 13+8\cdot 4)}{4^2+13^2} =\\
&= \frac{-80+110i}{185} = \frac{-16}{37}+i\frac{22}{37}.
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Re}\,\frac{(1-3i)^2-(1+i^9)^3}{(1+i^{21})^3-(2-i)^3} = \mathrm{Re}\left(-\frac{16}{37}+i\frac{22}{37}\right) = -\frac{16}{37}.$$

2.2. Різні форми запису комплексних чисел

Комплексне число має три основні форми запису:

- ***алгебраїчна форма*** комплексного числа
$$z = x+iy.$$
Декартові координати (x, y) точки називають *дійсною* $x = \mathrm{Re}\, z$ та *уявною* $y = \mathrm{Im}\, z$ частинами комплексного числа z;

- ***тригонометрична форма*** комплексного числа
$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$
Полярні координати (r, φ) точки називають *модулем* $r = |z|$ і *аргументом* $\varphi = \mathrm{Arg} z = \{\arg z + 2\pi k \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$, де $0 \le \arg z < 2\pi$ – головне значення аргументу числа z.

- ***показникова форма*** комплексного числа
$$z = re^{i\varphi},$$
яка виходить із тригонометричної форми за допомогою

формули Ейлера $\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.}$

Операції множення і ділення зручніше проводити над числами, записаними в тригонометричній формі:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right),$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right),$$
де $z_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right),\ z_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right).$

Тобто при множенні комплексних чисел в тригонометричній формі їх модулі перемножуються, а їх аргументи додаються. Відповідно при діленні — модулі діляться, аргументи — віднімаються.

Приклад 2.3. *Знайти тригонометричну та показникову форми чисел:* **1)** $z = 1 - \sqrt{3}i.$

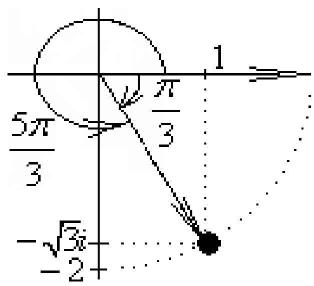
$r = |z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2,$

$\varphi = \arg z = 2\pi - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{5\pi}{3} \quad \Longrightarrow$

Тригонометрична форма:

$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right).$

Показникова форма: $z = re^{i\varphi} = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}.$



2) $z = -\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}.$

З формул зведення одержимо: $-\cos\frac{\pi}{7} = \cos(\pi - \frac{\pi}{7})$, $\sin\frac{\pi}{7} = \sin(\pi - \frac{\pi}{7})$. Тоді

$z = -\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7} = \cos(\pi - \frac{\pi}{7}) + i\sin(\pi - \frac{\pi}{7}) = \cos(\frac{6\pi}{7}) + i\sin(\frac{6\pi}{7})$

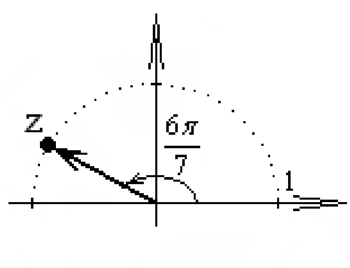
$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \varphi = \arg z = \frac{6\pi}{7}; \\ r = |z| = \sqrt{(\cos\frac{6\pi}{7})^2 + (\sin\frac{6\pi}{7})^2} = 1 \end{array}\right]$$

Тригонометрична форма:

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \cos(\frac{6\pi}{7}) + i\sin(\frac{6\pi}{7}).$

Показникова форма:

$z = re^{i\varphi} = e^{i\frac{6\pi}{7}}.$



3) $z = 1 + \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$.

$z = 1 + \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7} = \left[1 + \cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha;\ \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha\right]$
$= 2\cos^2\frac{\pi}{14} + i2\sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14} = 2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{14} + i\sin\frac{\pi}{14}\right)$
$\Longrightarrow \left[\varphi = \arg z = \frac{\pi}{14};\quad r = |z| = 2\cos\frac{\pi}{14}\right] \Longrightarrow$
Тригонометрична форма:
$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{14} + i\sin\frac{\pi}{14}\right)$.
Показникова форма: $z = re^{i\varphi} = 2\cos\frac{\pi}{14}\cdot e^{i\frac{\pi}{14}}$.

2.3. Натуральні степені й корені із комплексних чисел

З правила множення комплексних чисел у тригонометричній формі випливає ***формула Муавра***, $n \in \mathbb{N}$,

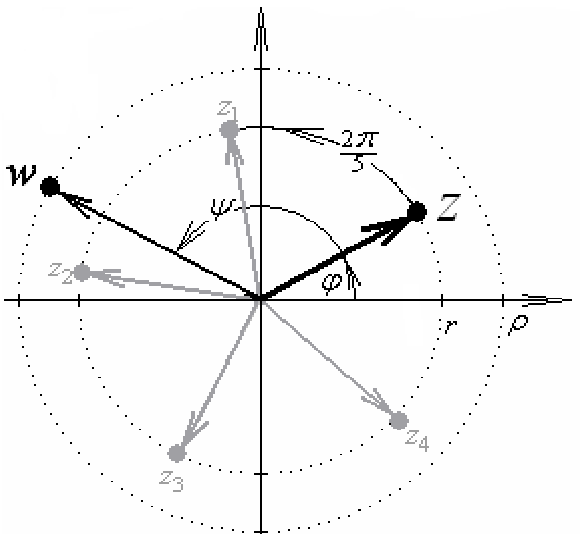
$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).}$$

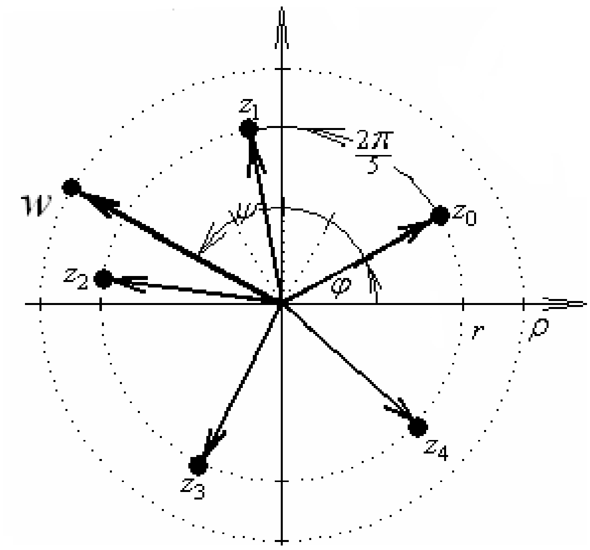
Числа z_k, аргументи яких $\varphi_k = \varphi + \frac{2\pi}{n}k, \quad k = 0, ..., (n-1)$, відрізняються на $\frac{2\pi}{n}$, мають однаковий n-й степінь

$$z_k^n = r^n\left(\cos n\left(\varphi + \frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin n\left(\varphi + \frac{2\pi}{n}k\right)\right) =$$
$$= r^n\left(\cos\left(n\varphi + 2\pi k\right) + i\sin\left(n\varphi + 2\pi k\right)\right).$$

Таким чином, існує *n різних комплексних коренів n-го степеня з комплексного числа* $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$:

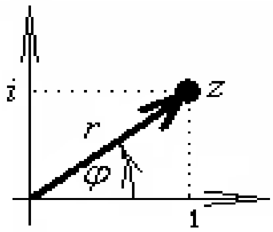
$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right), k = 0, ..., (n-1).}$$





Приклад 2.4. *Знайти z^n: $z = 1 + i^{2005}$, $n = 25$.*

$i^{2005} = i^{2004+1} = i^{4\cdot 501+1} = i.$



$$z = 1 + i^{2005} = 1 + i = \\ = \left[\begin{array}{c} r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}; \\ \varphi = \arg z = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} \end{array}\right] \\ = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt{2}(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4}).$$

$$\begin{aligned}(1+i^{2005})^{25} &= [(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)] = \\ &= (\sqrt{2})^{25}\left(\cos\tfrac{25\pi}{4} + i\sin\tfrac{25\pi}{4}\right) = \\ &= 2^{12}\sqrt{2}\left(\cos\left(6\pi + \tfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(6\pi + \tfrac{\pi}{4}\right)\right) = \\ &= 2^{12}\sqrt{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4}\right) = \\ &= 2^{12}\sqrt{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} + i\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2^{12}\left(1+i\right).\end{aligned}$$

Приклад 2.5. *Знайти корені $\sqrt[n]{z}$ та зобразити їх:*

1) $z = -8$, $n = 3$.

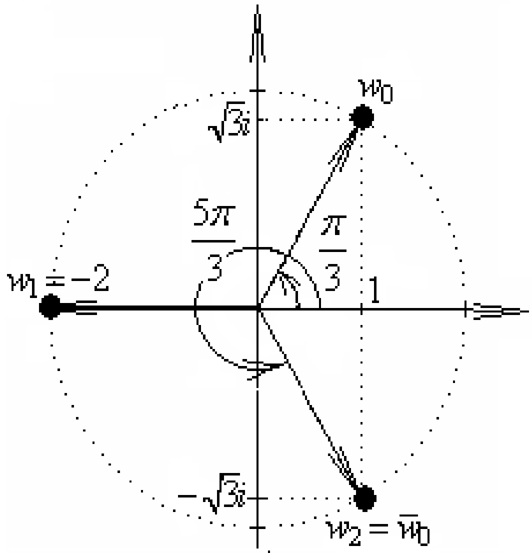
$$z = -8 + 0i = \left[\varphi = \arg z = \pi;\ r = |z| = \sqrt{(-8)^2 + 0^2} = 8\right] \Longrightarrow$$

$-8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi).$

$$w_k = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{3}\right)\right),\ k = 0,1,2.$$

$$w_k = \sqrt[3]{-8} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2\pi k}{3}\right)\right),\ k = 0,1,2.$$

$\Longrightarrow$



$$\begin{aligned} w_0 &= 2\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\right) = \\ &= 1 + i\sqrt{3}; \\ w_1 &= 2\left(\cos\left(\tfrac{\pi+2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi+2\pi}{3}\right)\right) = \\ &= 2\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = \\ &= 2\left(-1 + 0i\right) = -2; \\ w_2 &= 2\left(\cos\left(\tfrac{\pi+4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi+4\pi}{3}\right)\right) = \\ &= 2\left(\cos\left(\tfrac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\tfrac{5\pi}{3}\right)\right) = \\ &= 2\left(\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3} = \overline{w_0}. \end{aligned}$$

2) $z=-3-4i,\ n=2.$

Перший спосіб.

$z=-3-4i=\left[\varphi=\arg z=\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3};\ r=|z|=5\right]$
$\Longrightarrow z=5\left(\cos\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right).$

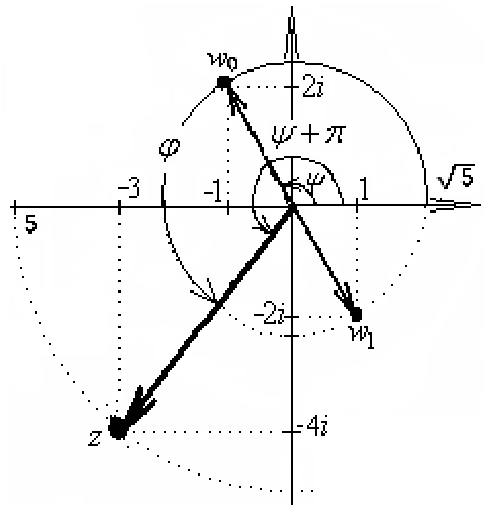
$$w_k=\sqrt{-3-4i}=\sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{2}\right)\right),k=0,1.$$

$\Longrightarrow$

$$w_0=\sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}{2}\right)\right),$$

$$w_1=\sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{3\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}{2}\right)\right)=$$

$$=\sqrt{5}\left(-\cos\left(\pi+\frac{\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}{2}\right)-i\sin\left(\pi+\frac{\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}{2}\right)\right)=-w_0.$$



Другий спосіб. Будемо шукати w_k в алгебраїчній формі:

$w_k=\sqrt{-3-4i}=a+bi.$

$\Longrightarrow$

$w_k^2=-3-4i=(a^2-b^2)+2abi\iff$

$$\begin{cases}-3=a^2-b^2\\-4=2ab\end{cases}$$

Зведемо обидва рівняння у квадрат і додамо їх.

$$9+16=25=a^4-2a^2b^2+b^4+4a^2b^2=(a^2+b^2)^2\iff a^2+b^2=5.$$

Таким чином,

$$\begin{cases}a^2-b^2=-3\\a^2+b^2=\ \ 5\\ \quad ab=-2\end{cases}\iff\begin{cases}a^2=\ \ 1\\b^2=\ \ 4\\ab=-2\end{cases}\iff\begin{cases}a=\ \ 1\\b=-2\end{cases}\text{або}\begin{cases}a=-1\\b=\ \ 2\end{cases}.$$

Отже, $w_0=1-2i,\ w_1=-1+2i.$

2.4. Геометрична інтерпретація множин комплексних чисел

Зауваження. Зверніть увагу на те, що у комплексному аналізі прийнято штрихувати доповнення шуканої області, а не її саму.

Приклад 2.6. *З'ясувати геометричний зміст співвідношень:*

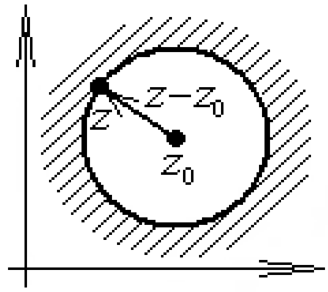
1) $\mathbf{|z-z_0| \le R}$.

Множина точок z, що задовольняють рівнянню

$$|z-z_0| = R,$$

є коло радіуса R з центром у точці z_0, тому що $|z-z_0|$ — це відстань між точками z і z_0.

Нерівність $|z-z_0| < R$ задає множину точок z, що знаходяться на відстані менше ніж R від фіксованої точки z_0, тобто це внутрішність круга радіуса R з центром у точці z_0.

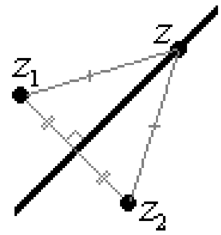


2) $\mathbf{|z-z_1| = |z-z_2|}$.

Множина точок z, що задовольняють рівнянню

$$|z-z_1| = |z-z_2|,$$

є множина точок, рівновіддалених від точок z_1 і z_2.



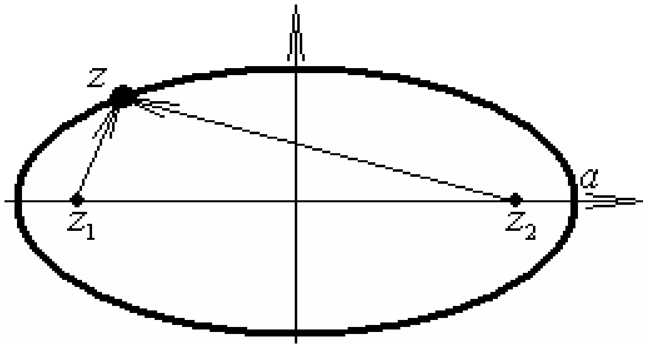
Отже, це рівняння прямої, перпендикулярної відрізку, що з'єднує точки z_1, z_2 та проходить через його середину.

3) $\mathbf{|z-z_1| + |z-z_2| = 2a}$.

Множина точок z, що задовольняють рівнянню

$$|z-z_1| + |z-z_2| = 2a,$$

де $a > \frac{1}{2}|z_1 - z_2|$, є еліпс з фокусами в точках z_1, z_2 і з великою піввіссю, яка дорівнює a, тому що $|z-z_1| + |z-z_2|$ — сума відстаней від точки z до точок z_1 і z_2.



Зауваження. Еліпсом називається геометричне місце точок площини, для котрих сума відстаней до двох заданих точок цієї площини (фокусів) є величина стала (звичайно, ця стала повинна бути більша за відстань між фокусами).

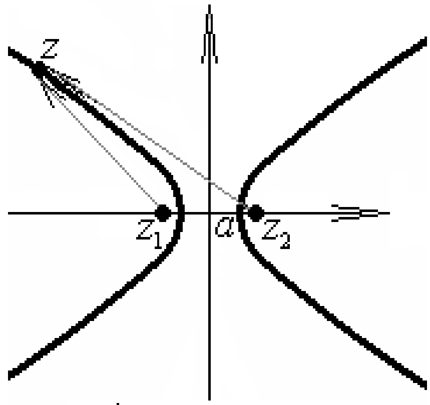
4) $\mathbf{||z-z_1| - |z-z_2|| = 2a}$.

Множина точок z, що задовольняють рівнянню

$$||z-z_1| - |z-z_2|| = 2a,$$

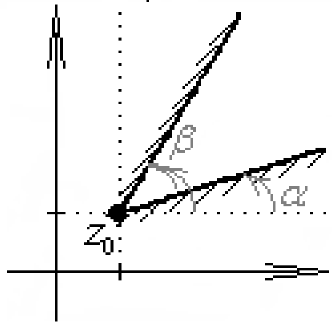
де $a < \frac{1}{2}|z_1 - z_2|$, є <u>гіперболою</u> з фокусами в точках z_1, z_2 і з дійсною піввіссю, яка дорівнює a.

Зауваження. <u>Гіперболою</u> називається геометричне місце точок площини, модуль різниці відстаней від яких до двох заданих точок цієї площини (фокусів) є величина стала (звичайно, ця стала повинна бути не нульова та менша за відстань між фокусами).



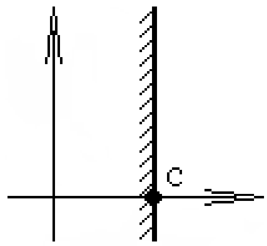
5) $\boldsymbol{\alpha \le \arg\,(z - z_0) \le \beta}$.

Множина точок z, що задовольняють цій нерівності, — це внутрішність кута між променями $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$ з вершиною в точці z_0.



6) $\mathbf{Re\, z \ge c}$.

Нехай $z = x + iy$, тоді $\mathrm{Re}\, z = x$, тобто $x \ge c$. Множина точок z, що задовольняють даній нерівності, — це права півплощина відносно прямої $x = c$.



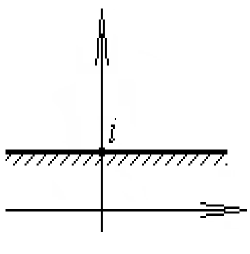
7) $\mathbf{Im\,(2\,z + i) \ge 3}$.

Нехай $z = x + iy$, тоді

$$\mathrm{Im}(2z + i) = \mathrm{Im}(2x + i(2y + 1)) = 2y + 1,$$

тобто $2y + 1 \ge 3$ або $y \ge 1$.

Множина, що задовольняє даній нерівності, — це верхня півплощина відносно прямої $y = 1$.



2.5. Контрольні запитання

1) Що таке модуль та аргумент комплексного числа?
2) Як зобразити комплексне число на площині?
3) Як записати комплексне число в тригонометричній формі?

4) Як записати комплексне число в показниковій формі?

5) Формула Ейлера.

6) Формула Муавра.

7) Формула коренів натурального степеня із комплексного числа.

2.6. Задачі для самостійного розв'язання

Аудиторні задачі	**Домашні задачі**
1.1. Виконати арифметичні дії над комплексними числами:	
1) $z_1 = 1 - i,\ z_2 = 1 + i.$	**2)** $z_1 = 3 + i,\ z_2 = 1 - 3i.$
1.2. Виконати дії:	
1) $\frac{1}{i^{13}} + \frac{1}{i^{23}} + \frac{1}{i^{34}};$ **2)** $\mathrm{Re}\dfrac{(1+2i)^2 - (1+i^7)^3}{(1+i)^3 + (2+i^{18})^2}.$	**3)** $\frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^7} + \frac{1}{i^9};$ **4)** $\mathrm{Im}\dfrac{i^7 - 1}{2 + (1+i^{17})^2}.$
1.3. Знайти тригонометричну та показникову форми числа:	
1) $z = -\sqrt{3} + i.$ **2)** $z = 3 - i.$	**3)** $z = -1 - i.$ **4)** $z = 1 + 3i.$
1.4. Знайти z^n:	
1) $z = 3 + \sqrt{3}i,\ n = 20.$	**2)** $z = -2 - 2i,\ n = 7.$
1.5. Знайти корені $\sqrt[n]{z}$ та зобразити їх:	
1) $z = 1 - i,\ n = 3;$ **2)** $z = 3 - 4i,\ n = 2.$	**3)** $z = -1,\ n = 4;$ **4)** $z = -1 - 3i,\ n = 3.$
1.6. З'ясувати геометричний зміст співвідношень:	
1) $\|z+3\| < 5;$ **2)** $\|z-1\| > \|z-2\|;$ **3)** $\|z-2\| + \|z+2\| = 5;$ **4)** $\mathrm{Re}\, z \geq 3;$ **5)** $\frac{\pi}{6} \leq \arg(z - 2 + i) < \frac{\pi}{4}.$	**6)** $\|z-2\| > 1;$ **7)** $\|\|z-2\| - \|z+2\|\| > 3;$ **8)** $\mathrm{Re}(z + 2 - i) < 3;$ **9)** $\mathrm{Im}\, z < -1;$ **10)** $\pi < \arg(z - 1 + i) \leq \frac{5\pi}{4}.$

3. Основні елементарні функції комплексної змінної

3.1. Однозначні функції

Основні елементарні *однозначні* функції комплексної змінної можуть бути визначені в такий спосіб ($z = x + iy$):

- показникова функція

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y);$$

- тригонометричні функції:

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right),$$
$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right),$$
$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z},$$
$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad z \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z};$$

- гіперболічні функції:

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right),$$
$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right),$$
$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad z \neq \frac{\pi}{2}i + \pi k i,\ k \in \mathbb{Z},$$
$$\operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}, \quad z \neq \pi k i,\ k \in \mathbb{Z}.$$

З означень тригонометричних і гіперболічних функцій випливає простий зв'язок між ними:

$$\operatorname{ch} z = \cos iz, \qquad \operatorname{sh} z = -i\ \sin iz,$$
$$\operatorname{cth} z = i\ \operatorname{ctg} iz, \qquad \operatorname{th} z = -i\ \operatorname{tg} iz.$$

Приклад 3.1. *Знайти модуль і аргумент числа:* e^{1+8i}.

За означенням показникової функції маємо

$$e^{1+8i} = e(\cos 8 + i \sin 8) = e(\cos(8 + 2\pi k) + i \sin(8 + 2\pi k)),\ k \in \mathbb{Z}.$$

$|z| = e,\ \arg z = 8 - 2\pi, (\arg z \in [0; 2\pi))\,,\ \operatorname{Arg} z = 8 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

Приклад 3.2. *Знайти значення виразів:*
$\cos(3+i); \sin(3+i); \mathrm{tg}(3+i); \mathrm{ctg}(3+i)$.

1) Знайдемо в загальному вигляді $\underline{w = \cos z.}$ Маємо:

$$w = u + iv = \cos z = \cos(x+iy) = \frac{1}{2}\left(e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^{-y+ix} + e^{y-ix}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}(\cos x - \right.$$
$$\left. - i\sin x)\right) = \cos x \frac{e^{y}+e^{-y}}{2} - i\sin x \frac{e^{y}-e^{-y}}{2} =$$
$$= \cos x \cdot \mathrm{ch}\, y - i\sin x \cdot \mathrm{sh}\, y.$$

Або інакше:

$$w = u + iv = \cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy. \Longrightarrow$$

$$\boxed{\cos(x+iy) = \cos x \cdot \mathrm{ch}\, y - i\sin x \cdot \mathrm{sh}\, y.}$$

Таким чином:

$$\cos(3+i) = \cos 3 \cdot \mathrm{ch} 1 - i\sin 3 \cdot \mathrm{sh} 1.$$

2) Знайдемо в загальному вигляді $\underline{w = \sin z}$. Маємо:

$$w = u + iv = \sin z = \sin(x+iy) = \frac{1}{2}\left(e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^{-y+ix} - e^{y-ix}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - \right.$$
$$\left. - i\sin x)\right) = \cos x \frac{e^{-y}-e^{y}}{2} + i\sin x \frac{e^{y}+e^{-y}}{2} =$$
$$= \sin x \cdot \mathrm{ch}\, y + i\cos x \cdot \mathrm{sh}\, y.$$

Або інакше:

$$w = u + iv = \sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cdot \cos iy + \cos x \cdot \sin iy \Longrightarrow$$

$$\boxed{\sin(x+iy) = \sin x \cdot \mathrm{ch}\, y + i\cos x \cdot \mathrm{sh}\, y.}$$

Тобто:

$$\sin(3+i) = \sin 3 \cdot \mathrm{ch}\, 1 + i\cos 3 \cdot \mathrm{sh}\, 1.$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{3})\ \operatorname{tg}(3+i) &= \frac{\sin(3+i)}{\cos(3+i)} = \frac{\sin 3\cdot \mathrm{ch}1 + i\cos 3\cdot \mathrm{sh}1}{\cos 3\cdot \mathrm{ch}\,1 - i\sin 3\cdot \mathrm{sh}\,1} = \\
&= \frac{(\sin 3\cdot \mathrm{ch}\,1 + i\cos 3\cdot \mathrm{sh}1)\overline{(\cos 3\cdot \mathrm{ch}\,1 - i\sin 3\cdot \mathrm{sh}\,1)}}{(\cos 3\cdot \mathrm{ch}\,1 - i\sin 3\cdot \mathrm{sh}\,1)\overline{(\cos 3\cdot \mathrm{ch}\,1 - i\sin 3\cdot \mathrm{sh}\,1)}} = \\
&= \frac{1}{\cos^2 3\cdot \mathrm{ch}^2 1 + \sin^2 3\cdot \mathrm{sh}^2 1}\times \\
&\quad \times \Big(\big(\sin 3\cdot\cos 3\cdot \mathrm{ch}^2 1 - \cos 3\cdot \sin 3\cdot \mathrm{sh}^2 1\big) + \\
&\quad + i\big(\sin^2 3\cdot \mathrm{sh}\,1\cdot \mathrm{ch}\,1 + \cos^2 3\cdot \mathrm{sh}\,1\cdot \mathrm{ch}\,1\big)\Big) = \\
&= \frac{1}{2}\cdot \frac{\sin 6 + i\mathrm{sh}\,2}{\cos^2 3\cdot \mathrm{ch}^2 1 + \sin^2 3\cdot \mathrm{sh}^2 1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{4})\ \operatorname{ctg}(3+i) &= \frac{\cos(3+i)}{\sin(3+i)} = \frac{\cos 3\cdot \mathrm{ch}\,1 - i\sin 3\cdot \mathrm{sh}\,1}{\sin 3\cdot \mathrm{ch}\,1 + i\cos 3\cdot \mathrm{sh}\,1} = \\
&= \frac{(\cos 3\cdot \mathrm{ch}\,1 - i\sin 3\cdot \mathrm{sh}\,1)\cdot\overline{(\sin 3\cdot \mathrm{ch}\,1 + i\cos 3\cdot \mathrm{sh}\,1)}}{(\sin 3\cdot \mathrm{ch}\,1 + i\cos 3\cdot \mathrm{sh}\,1)\cdot\overline{(\sin 3\cdot \mathrm{ch}\,1 + i\cos 3\cdot \mathrm{sh}\,1)}} = \\
&= \frac{1}{\cos^2 3\cdot \mathrm{sh}^2 1 + \sin^2 3\cdot \mathrm{ch}^2 1}\times \\
&\quad \times \Big(\big(\sin 3\cdot\cos 3\cdot \mathrm{ch}^2 1 - \cos 3\cdot \sin 3\cdot \mathrm{sh}^2 1\big) - \\
&\quad - i\big(\sin^2 3\cdot \mathrm{sh}\,1\cdot \mathrm{ch}\,1 + \cos^2 3\cdot \mathrm{sh}\,1\cdot \mathrm{ch}\,1\big)\Big) = \\
&= \frac{1}{2}\cdot \frac{\sin 6 - i\mathrm{sh}\,2}{\cos^2 3\cdot \mathrm{sh}^2 1 + \sin^2 3\cdot \mathrm{ch}^2 1}
\end{aligned}
$$

3.2. Багатозначні функції

Основні елементарні *багатозначні* функції комплексної змінної можуть бути визначені так:

- логарифмічна функція $(z \neq 0)$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ln}\, z &= \ln|z| + i\cdot \mathrm{Arg}\, z = \\
&= \ln|z| + i\cdot \arg z + 2\pi k i = \\
&= \ln z + 2\pi k i, \qquad\qquad k\in\mathbb{Z};
\end{aligned}
$$

головне значення логарифма: $\ln z = \ln|z| + i\cdot \arg z;$

- степенева функція ($z \neq 0, a \neq 0, a \in \mathbb{C}$)

$$a^z = e^{z \cdot \mathrm{Ln}\ a}, \quad z^a = e^{a \cdot \mathrm{Ln}\ z};$$

- обернені тригонометричні й гіперболічні функції $\mathrm{Arcsin} z$, $\mathrm{Arccos} z$, $\mathrm{Arctg} z$, $\mathrm{Arcctg} z$, $\mathrm{Arsh} z$, $\mathrm{Arch} z$, $\mathrm{Arth} z$, $\mathrm{Arcth} z$ визначаються як функції, обернені відповідно до функцій $\sin z$, $\cos z$, $\mathrm{tg} z$, $\mathrm{ctg} z$, $\mathrm{sh} z$, $\mathrm{ch} z$, $\mathrm{th}\, z$, $\mathrm{cth} z$.

Наприклад, якщо $z = \sin w$, то w називається *арксинусом* числа z, позначається $w = \mathrm{Arcsin} z$.

$$
\begin{aligned}
z &= \sin w &&\Longrightarrow && w = \mathrm{Arcsin}\ z = -i\ \mathrm{Ln}(iz + i\sqrt{z^2 - 1});\\
z &= \cos w &&\Longrightarrow && w = \mathrm{Arccos}\ z = -i\ \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1});\\
z &= \mathrm{tg}\, w &&\Longrightarrow && w = \mathrm{Arctg}\ z = -\frac{i}{2}\ \mathrm{Ln}\frac{1 + iz}{1 - iz};\\
z &= \mathrm{ctg}\, w &&\Longrightarrow && w = \mathrm{Arcctg}\ z = \frac{i}{2}\ \mathrm{Ln}\frac{z - i}{z + i};\\
z &= \mathrm{sh}\, w &&\Longrightarrow && w = \mathrm{Arsh}\ z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1});\\
z &= \mathrm{ch}\, w &&\Longrightarrow && w = \mathrm{Arch}\ z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1});\\
z &= \mathrm{th}\, w &&\Longrightarrow && w = \mathrm{Arth}\ z = \frac{1}{2}\ \mathrm{Ln}\frac{1 + z}{1 - z};\\
z &= \mathrm{cth}\, w &&\Longrightarrow && w = \mathrm{Arcth}\ z = \frac{1}{2}\ \mathrm{Ln}\frac{z + 1}{z - 1}.
\end{aligned}
$$

Усі ці функції є багатозначними, і їх головним значенням відповідають головні значення логарифмічних функцій.

Приклад 3.3. *Обчислити:* $\mathrm{Ln}(1 + i)$, $\ln(1 + i)$.

У задачі 1.4 для числа $z = 1 + i$ були знайдені модуль і головне значення аргументу: $r = |z| = \sqrt{2}$; $\varphi = \arg z = \frac{\pi}{4}$.

Таким чином, за означенням логарифмічної функції маємо:

$$\mathrm{Ln}\ (1 + i) = \ln|1 + i| + i \cdot \mathrm{Arg}\ (1 + i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} + 2\pi ki,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Головне значення:

$$\ln(1 + i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}.$$

Приклад 3.4. *Обчислити:*

1) $w = (1+i)^i$.

$$w = e^{i\mathrm{Ln}(1+i)} = e^{i(\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}+2\pi ki)} = e^{-(\frac{\pi}{4}+2\pi k)+i\ln\sqrt{2}} =$$
$$= e^{-(\frac{\pi}{4}+2\pi k)}(\cos(\ln\sqrt{2}) + i\sin(\ln\sqrt{2})),\ k\in\mathbb{Z}.$$

2) $w = (-8)^{\frac{1}{3}}$.

$$w = e^{\frac{1}{3}\mathrm{Ln}(-8)} = e^{\frac{1}{3}(\ln|-8|+i\arg(-8)+2\pi ki)} = e^{\frac{1}{3}(\ln 8+i\pi+2\pi ki)} =$$
$$= e^{\frac{1}{3}\ln 8+\frac{i\pi}{3}(1+2k)} = e^{\ln(8^{\frac{1}{3}})}\cdot e^{\frac{i\pi}{3}(1+2k)} =$$
$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi+2\pi k)}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2\pi k)}{3}\right)\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$

Зауваження. Порівняйте з прикладом 1.5. 1).

3) $w = 1^{-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}}$.

$$w = e^{(-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7})\mathrm{Ln}1} = e^{(-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7})(\ln|1|+i\cdot\arg 1+2\pi ki)} =$$
$$= e^{(-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7})(2\pi ki)} = e^{(-\sin\frac{\pi}{7}-i\cos\frac{\pi}{7})(2\pi k)} =$$
$$= e^{-2\pi k\sin\frac{\pi}{7}}\left(\cos\left(2\pi k(cos\frac{\pi}{7})\right) - -i\sin\left(2\pi k(cos\frac{\pi}{7})\right)\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$

Приклад 3.5. *Довести тотожність* $\mathrm{Arctg}\ z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz},\quad z\neq\pm i.$

Нехай $w = \mathrm{Arctg}\ z$, тоді:

$$z = \mathrm{tg}\ w = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i} : \frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2} = -i\ \frac{e^{2iw}-1}{e^{2iw}+1},\ w\neq\frac{\pi}{2}+\pi k.$$

Звідси $iz(e^{2iw}+1) = e^{2iw}-1$ або $e^{2iw} = \frac{-1-iz}{iz-1},\quad z\neq -i$, тоді

$$2iw = \mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz},\quad z\neq\pm i.$$

Таким чином:

$$w = \mathrm{Arctg}\ z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz},\quad z\neq\pm i.$$

Приклад 3.6.

1) *Знайти всі значення виразу і вказати серед них головне:* $\mathrm{Arctg}(1+i)$.

$$\mathrm{Arctg}(1+i) = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+i(1+i)}{1-i(1+i)} = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{i}{2-i} =$$
$$= -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{i(2+i)}{(2-i)(2+i)} = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right).$$

Далі:

$\operatorname{Ln}\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right)=\ln\left|-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right|+i\arg\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right)+i2\pi k=$
$\qquad=\ln\frac{1}{\sqrt{5}}-i\operatorname{arctg}2+\pi(2k+1)i,\quad k\in\mathbb{Z}.$

Тому що: $\left|-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right|=\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{4}{25}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$;

$\operatorname{Arg}\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right)=\pi-\operatorname{arctg}2+2\pi k=-\operatorname{arctg}2+\pi(2k+1),\ k\in\mathbb{Z}.$

Таким чином,

$$\operatorname{Arctg}(1+i)=-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2+(2k+1)\frac{\pi}{2}+\frac{i}{2}\ln\sqrt{5},\ k\in\mathbb{Z}.$$

Головне значення:

$$\operatorname{arctg}(1+i)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2++\frac{i}{2}\ln\sqrt{5}.$$

Звідси

$$\operatorname{Arctg}(1+i)=\operatorname{arctg}(1+i)+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

2) *Знайти корені рівняння* $\operatorname{tg}z=1+i$.

У прикладі 2.5 був знайдений загальний вигляд оберненої функції

$$\operatorname{tg}z=w\qquad\Rightarrow\qquad z=\operatorname{Arctg}w=-\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+iw}{1-iw}.$$

Тоді якщо $\operatorname{tg}z=1+i$, то з прикладу 2.6 маємо

$$z=\operatorname{Arctg}(1+i)=-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2+(2k+1)\frac{\pi}{2}+\frac{i}{2}\ln\sqrt{5},\ k\in\mathbb{Z}.$$

3) *Знайти корені рівняння* $\operatorname{ctg}z=1$.

Загальний вигляд оберненої функції

$$\operatorname{ctg}z=w\qquad\Rightarrow\qquad z=\operatorname{Arcctg}w=\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{w-i}{w+i}.$$

Тоді якщо $\operatorname{ctg}z=1$, то

$$z=\operatorname{Arcctg}(1)=\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1-i}{1+i}=\frac{i}{2}\operatorname{Ln}(-i)=\frac{i}{2}\Big(\ln|-i|+i\arg(-i)+2\pi ki\Big)=$$
$$=\frac{i}{2}\left(i\frac{3\pi}{2}+2\pi ki\right)=-\frac{3\pi}{4}-\pi k=-\frac{3\pi}{4}+\pi-\pi k-\pi=\frac{\pi}{4}+\pi l,\quad l\in\mathbb{Z}.$$

Зауваження. Порівняйте зі знайомою тригонометричною формулою

$$\operatorname{ctg}z=1\quad\Rightarrow\quad z=\operatorname{arcctg}1+\pi k=\frac{\pi}{4}+\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

4) *Знайти корені рівняння* $\cos z = 10$.

1) Знайдемо загальний вигляд оберненої функції

$$\cos z = w \qquad \Rightarrow \qquad z = \mathrm{Arccos}\, w.$$

Перепишемо визначення функції $\cos z$ у вигляді рівняння:

$$\frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = w \quad \text{або} \quad e^{2iz} - 2we^{iz} + 1 = 0.$$

Це квадратне рівняння відносно e^{iz}, його корені $e^{iz} = w + \sqrt{w^2-1}$, якщо пам'ятати, що корінь квадратний $\sqrt{w^2-1}$ двозначна функція. Тоді:

$$iz = \mathrm{Ln}\left(w + \sqrt{w^2-1}\right) \Longrightarrow z = \mathrm{Arccos}\,(w) = -i\mathrm{Ln}\left(w + \sqrt{w^2-1}\right).$$

2) Знайдемо $\mathrm{Arccos}\,(10)$.

$$\mathrm{Arccos}\,(10) = -i\mathrm{Ln}\left(10 + \sqrt{10^2-1}\right) = -i\left(\ln(10+\sqrt{99}) + 2\pi k i\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

3) Звідси:

$$z = \mathrm{Arccos}\,(10) = 2\pi k - i\ln(10 \pm 3\sqrt{11}),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Тут під коренем із 11 ми розуміємо арифметичний (невід'ємний дійсний) корінь. Одержали дві серії коренів:

$$z_1 = 2\pi k - i\ln(10 + 3\sqrt{11}),\ k \in \mathbb{Z};$$

$$z_2 = 2\pi k - i\ln(10 - 3\sqrt{11}),\ k \in \mathbb{Z}.$$

З того, що $\ln(10 - 3\sqrt{11}) = \ln\frac{1}{(10+3\sqrt{11})} = -\ln(10+3\sqrt{11})$, маємо:

$$z_{1,2} = 2\pi k \pm i\ln(10 + 3\sqrt{11}),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Зауваження. Зверніть увагу на те, що

$$\cos z = 10 > 1 \quad \Rightarrow \quad \text{це рівняння дійсних розв'язків немає.}$$

3.3. Контрольні запитання

1) Означення показникової функції комплексної змінної.
2) Означення тригонометричних функцій комплексної змінної.
3) Означення гіперболічних функцій комплексної змінної.
4) Означення логарифмічної функції комплексної змінної.
5) Означення степеневої функції комплексної змінної.

3.4. Задачі для самостійного розв'язання

2.1. Знайти модуль і аргумент числа:	
1) e^{2+i}; **2)** e^{-3-i}.	**3)** e^{2-3i}; **4)** e^{3+i}.
2.2. Знайти значення виразів:	
1) $\cos(2+i)$; **2)** $\mathrm{tg}(2+i)$.	**3)** $\sin(2i)$; **4)** $\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{4} - i\ln(2))$.
2.3. Обчислити:	
1) $\mathrm{Ln}(-4)$; **2)** $\ln(-4)$.	**3)** $\mathrm{Ln}(i)$; **4)** $\ln(i)$.
2.4. Знайти всі значення виразів:	
1) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$; **2)** $(3-4i)^{-i}$.	**3)** $(-2)^{\sqrt{2}i}$; **4)** $(-3+4i)^{1+i}$.
2.5. Довести рівності:	
1) $\mathrm{Arccos}\, z =$ $= -i\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$; **2)** $\mathrm{Arsh}\, z = \mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$.	**3)** $\mathrm{Arcsin}\, z =$ $= -i\mathrm{Ln}(iz+\sqrt{1-z^2})$; **4)** $\mathrm{Arch}\, z = \mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$.
2.6. Знайти всі значення функцій і вказати серед них головне:	
1) $\mathrm{Arccos}\,\frac{1}{2}$; **2)** $\mathrm{Arsh}\, 2$.	**3)** $\mathrm{Arcsin}\, 3$; **4)** $\mathrm{Arch}\, i$.
2.7. Розв'язати рівняння:	
1) $\cos z = \frac{1}{2}$; **2)** $\mathrm{th}\, z = 2$.	**3)** $\sin z = 3$; **4)** $\mathrm{cth}\, z = i$.

4. Конформні відображення 1

У теорії конформних відображень розглядаються дві основні задачі:

1) знайти образ області при заданому відображенні;

2) знайти конформне відображення однієї заданої області на іншу.

Практичні шляхи розв'язання цих задач відкриває принцип відповідності меж, згідно з яким конформне відображення однієї області на іншу визначається неперервною і взаємно однозначною відповідністю між їх межами. Для розв'язання першої задачі потрібно знайти образ межі заданої області, а для розв'язання другої — аналітичну функцію, що встановлює взаємно однозначну відповідність між межами двох областей. Також використовуються й інші геометричні принципи теорії функцій комплексної змінної.

У теорії конформних відображень немає універсального методу, що забезпечує розв'язання якої-небудь з цих задач. Немає загального алгоритму, що дозволяє знайти образ заданої області при заданому конформному відображенні, а тим більше немає алгоритму побудови конформного відображення з однієї області в іншу. Розв'язання конкретної задачі можна знайти, добре знаючи конформні відображення, здійснювані елементарними аналітичними функціями, а також конформні відображення типових областей. У кожному конкретному випадку використовують розв'язання однієї зі стандартних задач.

Далі розглянемо докладніше конформні відображення, здійснювані основними елементарними функціями.

4.1. Лінійні функції

Лінійною функцією називається функція

$$w = az + b,$$

де a, b – комплексні константи, $a \neq 0$.

Записавши коефіцієнт a у вигляді $a = ke^{i\alpha}$ (де k, α дійсні, $k > 0$), можна представити лінійне відображення як композицію трьох:

- $w = kz$ — розтягування в k раз;
- $w = e^{i\alpha}z$ — поворот на кут α;
- $w = z + b$ — паралельне перенесення уздовж вектора b.

Лінійна функція здійснює конформне відображення будь-якої області на геометрично подібну область. Лінійна функція — єдине відображення, що зберігає подібність всіх фігур.

Приклад 4.1. *Знайти, на яку область відображається чверть круга радіуса R з центром у початку координат лінійною функцією*

$$w = (-1 - i)z + (2 + i).$$

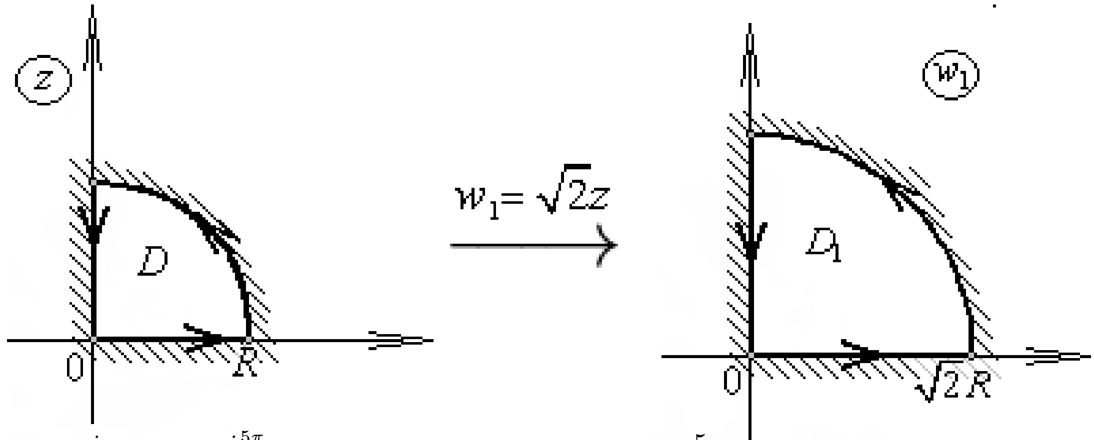
Запишемо параметри даної лінійної функції у вигляді:

$$a = -1 - i = \begin{bmatrix} k = |a| = \sqrt{2}, \\ \alpha = \arg(a) = \frac{5\pi}{4}, \end{bmatrix} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = ke^{i\alpha},$$

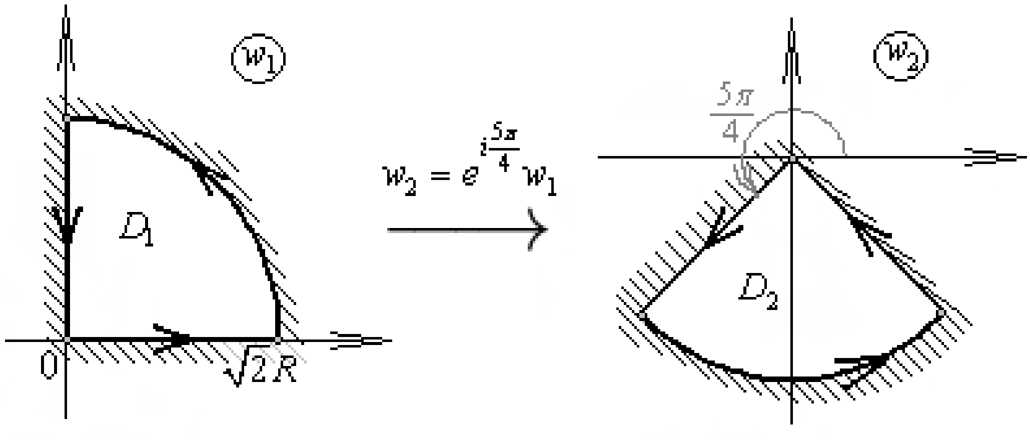
$b = 2 + i.$

З'ясуємо, в яку криву переходить межа області D при цьому відображенні. Припустимо, що ця межа обходиться, починаючи від точки $z = 0$, в додатному напрямі (тобто так, що при обході область D залишається зліва). Для цього послідовно виконаємо наступні відображення:

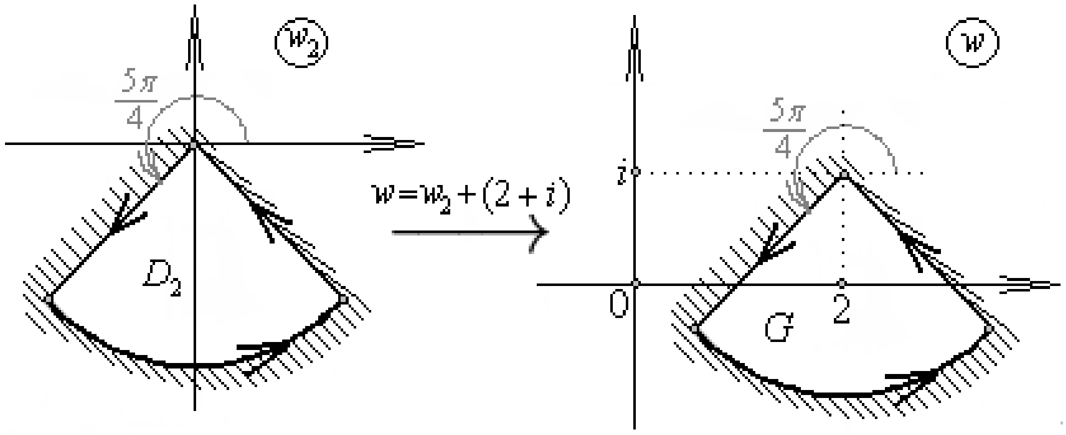
1) $w_1 = kz = \sqrt{2}z$ – при цьому напрям всіх векторів z залишиться тим самим, але довжина збільшиться в $k = |a| = \sqrt{2}$ разів;



2) $w_2 = e^{i\alpha}w_1 = e^{i\frac{5\pi}{4}}w_1$ – поворот на кут $\alpha = \frac{5\pi}{4}$;



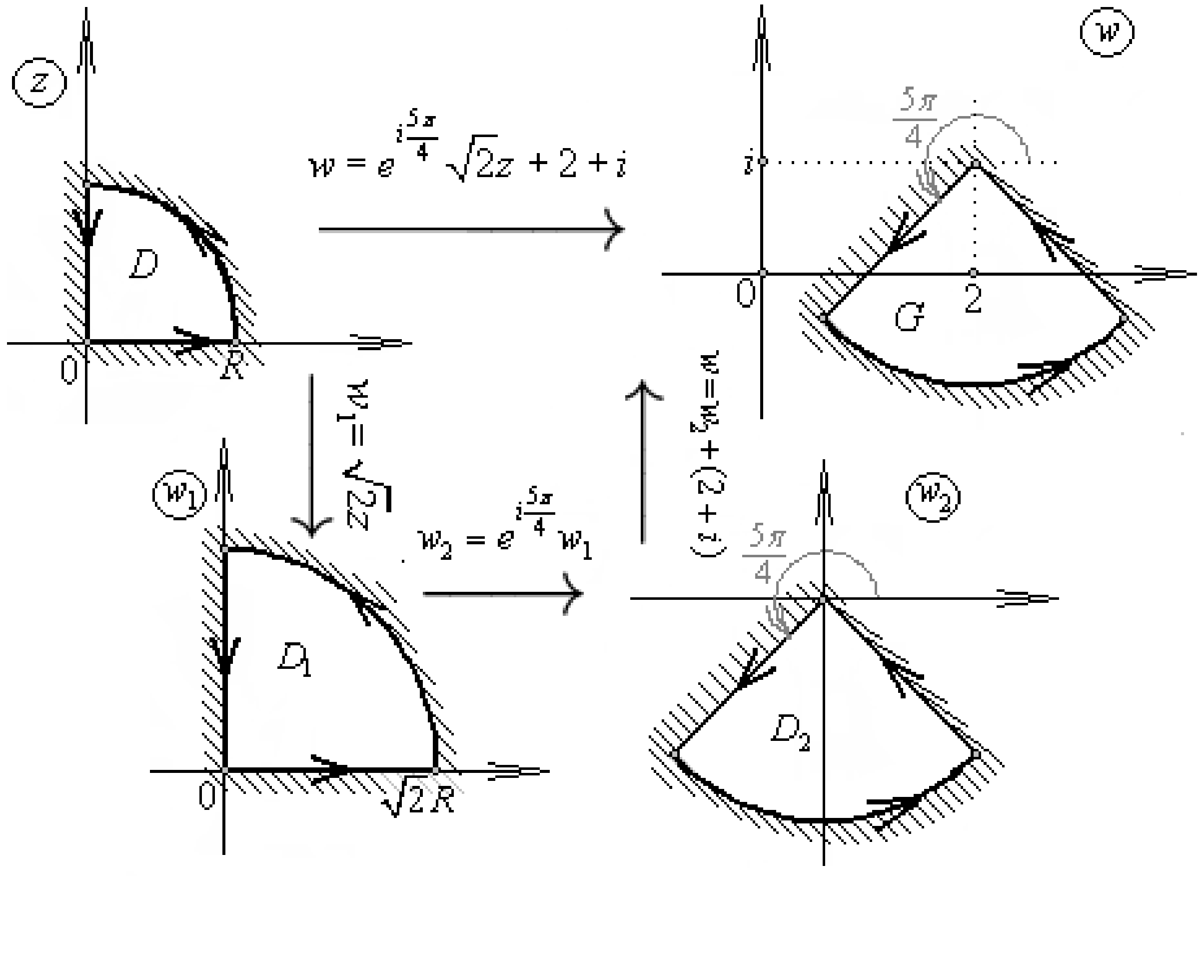
3) $w = w_2 + b = w_2 + 2 + i$ – паралельне перенесення на $b = 2 + i$.



Легко бачити, що кожна внутрішня точка z чверті круга D перейде у внутрішню точку чверті круга G w-площини, і при цьому все G буде заповнене образами точок z повністю, без жодних "дірок".

Таким чином, одержуємо шукане відображення

$$w = w_2 + 2 + i = e^{i\frac{5\pi}{4}} w_1 + 2 + i = e^{i\frac{5\pi}{4}} \sqrt{2}z + 2 + i.$$



4.2. Квадратична функція

Квадратичною функцією називається многочлен другого ступеня

$$w = az^2 + bz + c,$$

де a, b, c – будь-які комплексні константи, $a \neq 0$.

Записуючи квадратичну функцію у вигляді

$$w = a\left(z + \frac{b}{a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{a},$$

можна представити її як композицію трьох перетворень:

$$w_1 = z + \frac{b}{a}, \quad w_2 = {w_1}^2, \quad w = aw_2 + c - \frac{b^2}{a},$$

з яких перше і останнє – лінійні. Таким чином, для дослідження відображень, здійснюваних квадратичною функцією, досить досліджувати відображення простою квадратичною функцією $w = z^2$.

4.2.1. Проста квадратична функція

Функція $w = z^2$ має єдину критичну точку $z = 0\,\big((z^2)' = 0 \Leftrightarrow z = 0\big)$. Ця функція у всій комплексній площині неоднолиста – вона приймає однакові значення в точках z і $-z$. В якості області однолистості розглядається звичайно яка-небудь напівплощина $C < \arg z < C + \pi$, де C — будь-яке дійсне число.

Полярна мережа ліній в напівплощині $C < \arg z < C + \pi$ відображається в полярну мережу ліній в w-площини з розрізом уздовж променя: $2C < \arg z < 2C + 2\pi$. Зокрема, верхня напівплощина $\operatorname{Im} z > 0 \quad (C = 0)$ відображається функцією $w = z^2$ у w-площину з розрізом уздовж додатної дійсної піввісі, а права напівплощина $\operatorname{Re} z > 0 \quad (C = -\pi/2)$ — у площину з розрізом уздовж від'ємної дійсної піввісі.

Приклад 4.2. *Знайти, на яку область відображається чверть круга радіусу R за допомогою функції $w = z^2$.*

Запишемо змінні z і w у показниковій формі:

$$z = re^{i\varphi}, \quad w = \rho e^{i\psi}.$$

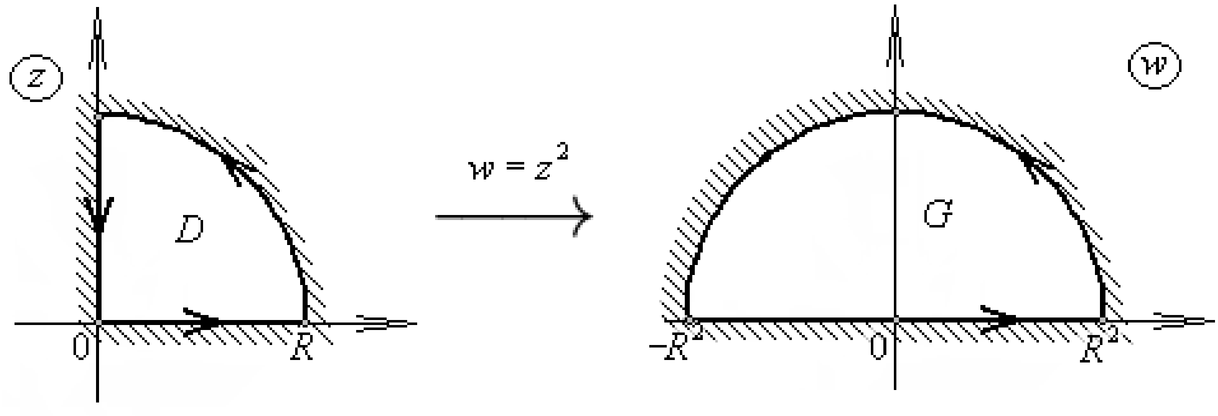
Оскільки $w = z^2$, то $\rho e^{i\psi} = (re^{i\varphi})^2 = r^2 e^{2i\varphi}$, звідки

$$\rho = r^2, \quad \psi = 2\varphi. \tag{4.1}$$

З'ясуємо, в яку криву переходить межа області D при відображенні $w = z^2$. Припустимо, що ця межа обходиться починаючи, від точки $z = 0$ в додатному напрямі. З формул (4.1) витікає, що

- відрізок дійсної вісі $\{0 \le r \le R,\ \varphi = 0\}$ z-площини перейде у відрізок $\{0 \le \rho \le R^2,\ \psi = 0\}$ дійсної вісі w-площини;
- чверть кола $\{r = R,\ 0 \le \varphi \le \pi/2\}$ перейде в півкруг $\{\rho = R^2,\ 0 \le \psi \le \pi\}$;
- відрізок уявної вісі $\{0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi \le \pi/2\}$ перейде в відрізок $\{0 \le \rho \le R^2,\ \psi = \pi\}$, тобто в відрізок $[-R, 0]$ дійсної вісі.

Легко бачити, що кожна внутрішня точка z чверті круга D перейде у внутрішню точку півкола E w-площини, і при цьому весь півкруг G буде заповнений образами точок z повністю, без жодних "дірок".



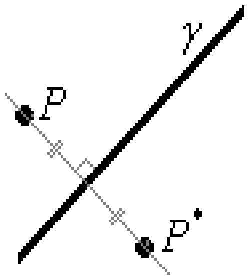
4.3. Дробово-лінійні функції

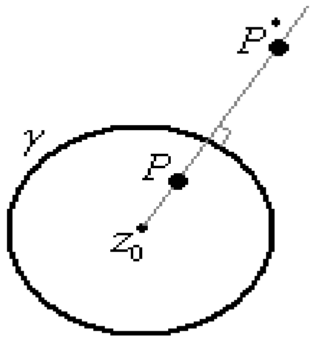
Дробово-лінійною називається функція виду
$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \ne 0.$$

Узагальненим колом називають або звичайне коло, або пряму. (Пряма – це коло, що проходить через нескінченно віддалену точку.)

Дві *точки* P і P^* називаються *симетричними відносно узагальненого кола* γ, якщо будь-яке узагальнене коло, що проходить через P і P^* ортогональне даному колу γ.

Якщо узагальнене коло γ — це пряма, то точки P і P^* будуть знаходитись від γ на однаковій відстані й пряма, що їх з'єднує, буде перпендикулярною γ.





Якщо узагальнене коло γ — це звичайне коло радіуса r з центром у точці z_0, тоді:

$$|z_0 - P^*| \cdot |z_0 - P| = r^2.$$

Властивості:

1. Дробово-лінійна функція однозначно й конформно відображає розширену комплексну площину $\overline{\mathbb{C}}$ на себе.

2. Функція, обернена до дробово-лінійної, є дробово-лінійною. Композиція двох дробово-лінійних функцій – знову дробово-лінійна функція.

3. Будь-яку дробово-лінійну функцію можна представити у вигляді

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c} \cdot \frac{1}{cz+d}, \quad \text{якщо } c \neq 0,\ ad \neq bc,$$

або

$$w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}, \quad \text{якщо } c = 0,\ ad \neq bc,$$

тобто вона є композицією дробово-лінійних наступних функцій:

- $w = az$ — поворот на кут $\arg\ a$ й розтягнення в $|a|$ разів;
- $w = z + b$ — паралельний перенос;
- $w = \frac{1}{z}$ — інверсія з наступним перетворенням симетрії відносно дійсної осі.

4. Кругова властивість. Під дією дробово-лінійної функції узагальнене коло переходить в узагальнене коло.

5. Властивість симетрії. Дробово-лінійна функція переводить будь-яку пару точок, симетричних щодо узагальненого кола, в пару точок, симетричних відносно образу цього узагальненого кола.

6. Властивість трьох точок. Нехай у розширеній $z-$площині задано три різні точки $\{z_1,\ z_2,\ z_3\}$ і в розширеній $w-$площині задано три різні точки $\{w_1,\ w_2,\ w_3\}$. Тоді існує єдина дробово-лінійна функція, що переводить

$$z_k \longmapsto w_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Якщо всі числа $\{z_k,\ w_k,\ k = 1, 2, 3\}$ скінченні, тоді шукана дробово-лінійна функція може бути представлена у вигляді:

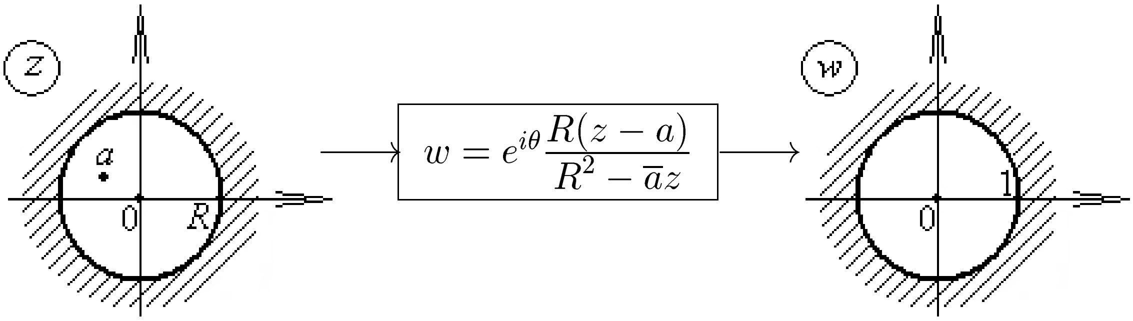
$$\frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2}. \tag{4.2}$$

Якщо хоча б одне з чисел $\{z_k,\ w_k,\ k = 1, 2, 3\}$ дорівнює ∞, то чисельник і знаменник у формулі (4.2), до яких входить це число, заміняємо на одиницю. Наприклад, $z_3 = \infty$. Тоді, розглядаючи границю при $z_3 \to \infty$ у виразі (4.2), бачимо: $\lim\limits_{z_3 \to \infty} \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = 1$.

Дробово-лінійна функція вигляду:

$$w = e^{i\theta} \frac{R(z - a)}{R^2 - \overline{a}z}, \quad |a| < R,\ \theta \in \mathbb{R}$$

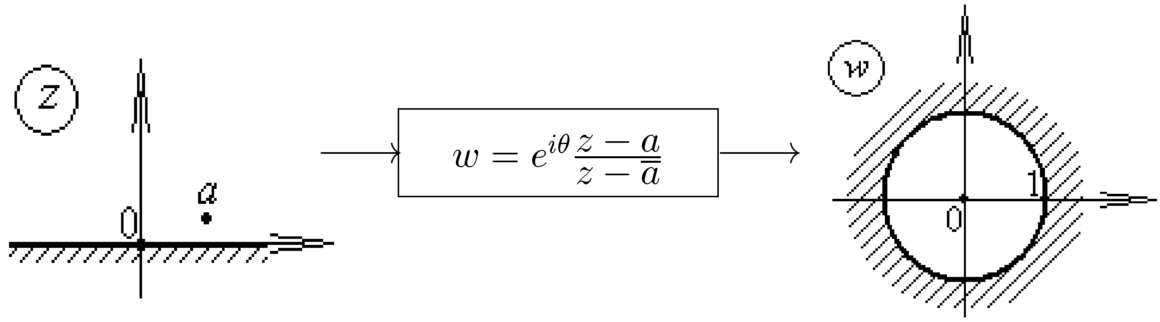
переводить *внутрішність кола* $|z| < R$ *у внутрішність одиничного кола* $|w| < 1$, межу — в межу, зовнішність — у зовнішність, $a \longmapsto 0$.



Дробово-лінійна функція вигляду:

$$w = e^{i\theta} \frac{z - a}{z - \overline{a}}, \qquad \frac{a - \overline{a}}{2i} = \operatorname{Im} a > 0,\ \theta \in \mathbb{R}$$

переводить *верхню півплощину* $\operatorname{Im} z > 0$ *у внутрішність одиничного кола* $|w| < 1$, дійсну вісь — в одиничне коло, нижню півплощину — в зовнішність одиничного кола, $a \longmapsto 0$.



Приклад 4.1.
1) *Знайти дробово-лінійну функцію, що переводить точки* $\{0, 2i, 1+i\}$ *в точки* $\{4, 0, 1+i\}$.

Шукану функцію знаходимо з рівності (4.2):

$$\frac{z-0}{z-2i} : \frac{1+i-0}{1+i-2i} = \frac{w-4}{w-0} : \frac{1+i-4}{1+i-0}, \quad \text{отже} \quad w = \frac{-4z+8i}{(1+i)z+2i}.$$

2) *Знайти дробово-лінійну функцію, що переводить точки* $\{i, \infty, -i\}$ *в точки* $\{2, 1+i, \infty\}$.

Знову застосовуємо рівність (4.2), із заміною всіх чисельників і знаменників, до яких входить ∞, на одиниці.

$$\frac{z-i}{1} : \frac{-i-i}{1} = \frac{w-2}{w-(1+i)} : \frac{1}{1}, \quad \text{тоді} \quad w = \frac{(1+i)z+(1+3i)}{z+i}.$$

Приклад 4.2. *Знайти, на яку область відображається чверть круга радіусу* R *за допомогою функції* $w = \frac{1}{z}$.

Запишемо змінні z і w у показниковій формі:

$$z = re^{i\varphi}, \quad w = \rho e^{i\psi}.$$

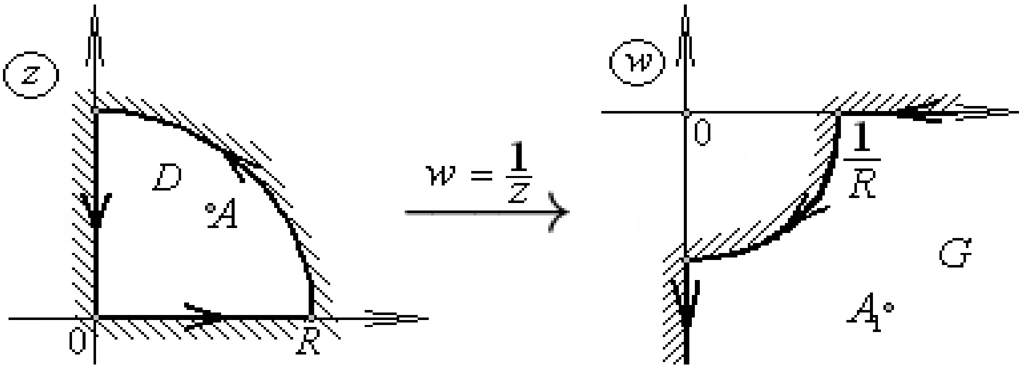
Оскільки $w = z^{-1}$, то $\rho e^{i\psi} = (re^{i\varphi})^{-1} = r^{-1}e^{-i\varphi}$, звідки

$$\rho = \frac{1}{r}, \quad \psi = -\varphi. \tag{4.3}$$

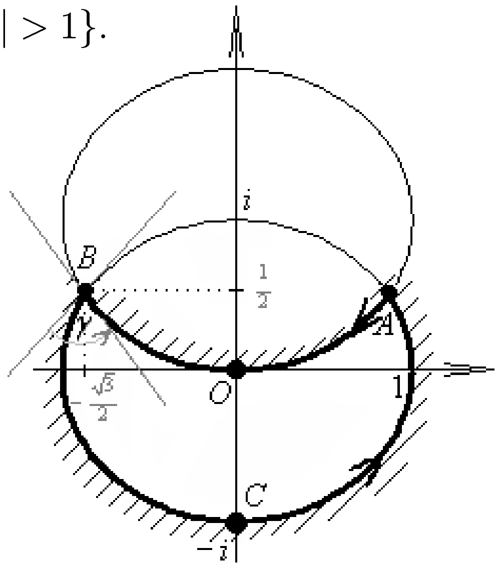
З'ясуємо, в яку криву переходить межа області D при відображенні $w = z^{-1}$. Припустимо, що ця межа обходиться починаючи від точки $z = 0$ в додатному напрямі. З формул (4.3) виходить, що

- відрізок дійсної вісі $\{0 \le r \le R,\ \varphi = 0\}$ z-площини перейде у промінь $\{\frac{1}{R} \le \rho < +\infty,\ \psi = 0\}$ дійсної вісі w-площини;
- чверть кола $\{r = R,\ 0 \le \varphi \le \pi/2\}$ перейде в чверть кола $\{\rho = \frac{1}{R},\ -\frac{\pi}{2} \le \psi \le 0\}$;
- відрізок уявної вісі $\{0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi \le \pi/2\}$ перейде в промінь $\{\frac{1}{R} \le \rho < +\infty,\ \psi = -\frac{\pi}{2}\}$, тобто в промінь $[-\frac{1}{R}, -\infty)$ уявної вісі.

Легко бачити, що кожна внутрішня точка z чверті круга D перейде у внутрішню точку G w-площини, і при цьому весь G буде заповнений образами точок z повністю, без жодних "дірок".



Приклад 4.3. *Відобразити на верхню півплощину* $\{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Im} z > 0\}$ *кругову лунку* $G = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1, |z - i| > 1\}$.



Межу лунки G утворюють дуги одиничних кіл $|z| = 1, |z - i| = 1$ з центрами в точках 0 та i, відповідно. Виберемо на межі точки O, A, B, C. Обхід області при русі від O через B, C до A буде здійснюватися в додатному напрямку (тобто область завжди буде залишатися ліворуч).

При цьому дуга кола $|z| = 1$ однозначно визначається трьома точками B, C, A; а дуга кола $|z - i| = 1$ – точками A, O, B. Знайдемо координати точок B, A з системи рівнянь:

$$\begin{cases} |z| \quad\;\; = 1 \\ |z - i| = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \ 1 \\ x^2 + y^2 = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \ \ \frac{1}{2} \end{cases},$$

тому що вони є точками перетину межових кіл. У $z-$площині координати точок

	O	A	C	B
z	0	$\frac{\sqrt{3}+i}{2}$	$-i$	$\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$

Знайдемо кут перетину кіл, тобто кут, під яким перетинаються дотичні до кіл, наприклад, у точці B. Рівняння дуги A, O, B можна записати у вигляді $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$, тому кутовий коефіцієнт дотичної:

$$k_1 = \operatorname{tg} \alpha = y'(B) = \left.\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right|_{x = x_B} = -\sqrt{3}.$$

Рівняння дуги B, C, A можна записати у вигляді $y = \sqrt{1-x^2}$, тому кутовий коефіцієнт дотичної

$$k_2 = \operatorname{tg}\beta = y'(B) = \left.\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right|_{x=x_B} = \sqrt{3}.$$

Виходить, кола перетинаються під кутом, тангенс якого:

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} = \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{3}}{1+(-\sqrt{3})\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Таким чином, кола перетинаються під кутом $\gamma = \frac{\pi}{3}$. Під дією шуканого конформного відображення потрібно одержати верхню півплощину, тобто область, межу якої утворюють промені $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$, які перетинаються під кутом π.

Потрібно збільшити кут утричі, тому будемо застосовувати відображення $w = z^3$. Але якось потрібно "розпрямити" нашу область. Для цього досить відобразити одну з точок перетину кіл у ∞.

1) "Розпрямимо" лунку, використавши дробово-лінійною функцією w_1, що переводить

$$B \to 0,\ A \to \infty \qquad \Longrightarrow \qquad w_1 = \frac{z-z_B}{z-z_A} = \frac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i},$$

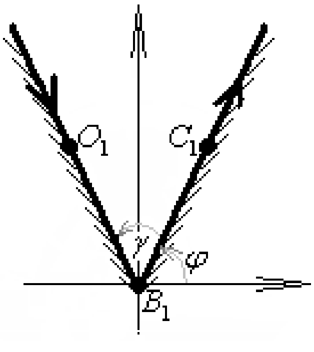
при цьому:

$$O_1 = w_1(O) = -\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} = -\frac{(\sqrt{3}-i)^2}{|\sqrt{3}+i|^2} = -\frac{1-i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}},\ |w_1(O)| = 1.$$

$$C_1 = w_1(C) = -\frac{\sqrt{3}-3i}{\sqrt{3}+3i} = -\frac{(\sqrt{3}-3i)^2}{|\sqrt{3}-3i|^2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}},\ |w_1(C)| = 1.$$

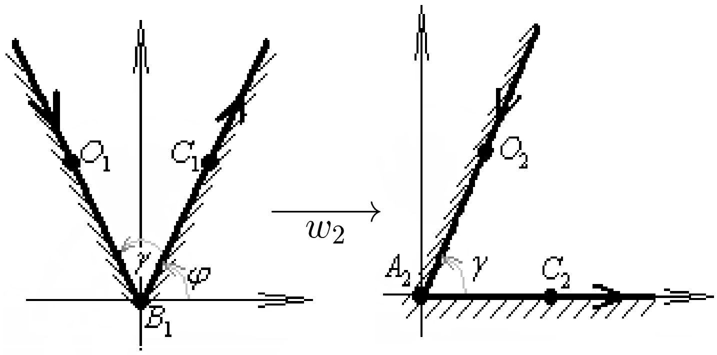
Дробово-лінійна функція є конформним відображенням, тому зберігаються кути між кривими. При цьому узагальнені кола переходять в узагальнені кола (див. властивості 1 і 2).

Таким чином, дуга кола $|z| = 1$ перейшла в промінь $\varphi = \arg z = \frac{2\pi}{3}$, а дуга кола $|z - i| = 1$ у промінь $\varphi = \arg z = \frac{\pi}{3}$. Залишається помітити, що внутрішність луночки перейшла у внутрішність кута, тому що кут між кривими зберігається.



2) Повернемо кут так, щоб одна з його сторін збіглася з додатним напрямком дійсної вісі. Цей поворот здійснює функція

$$w_2(z) = w_1(z) \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

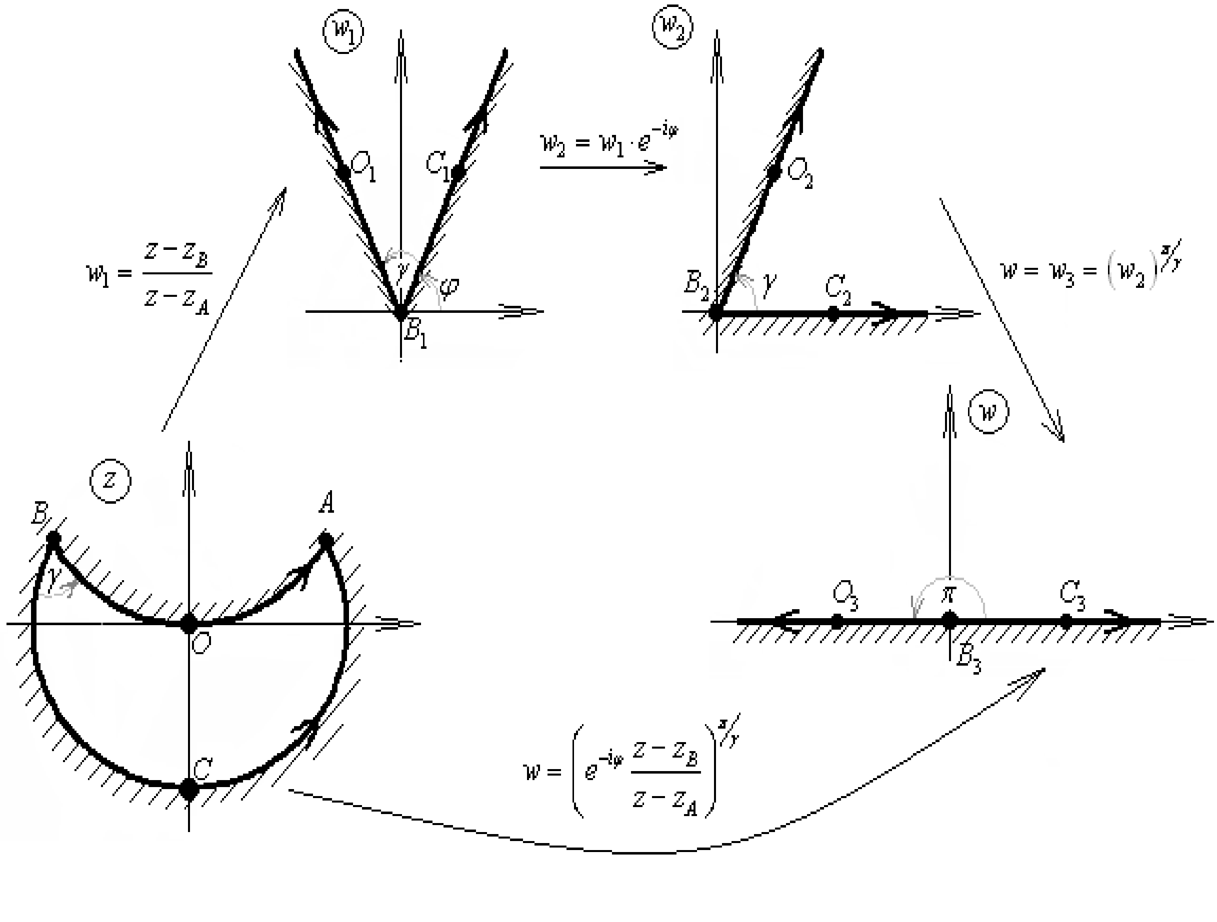


3) ***Конформне відображення кута*** $0 < \arg z < \pi\gamma$ $(0 < \gamma \le 2)$ ***на верхню півплощину здійснюється функцією*** $w(z) = z^{1/\gamma}$, тому шукане відображення

$$w = (w_2)^{1/(1/3)} = (w_2)^3 = \left(w_1 \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = \left(\frac{2z + \sqrt{3} - i}{2z - \sqrt{3} - i}\right)^3 e^{-i\pi}.$$

Відповідь:

$$w = -\left(\frac{2z + \sqrt{3} - i}{2z - \sqrt{3} - i}\right)^3.$$



4.4. Функція Жуковського

Функцією Жуковського називається раціональна функція

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

З'ясуємо, за якої умови дві різні точки переходять в одну і ту ж точку. Нехай $z_1 \neq z_2$ і $\frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) = \frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right)$ Звідси

$$\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) - \left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right) = (z_1 - z_2)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right) = 0.$$

Оскільки $z_1 \neq z_2$, та ця рівність рівносильна умові

$$z_1 z_2 = 1.$$

Тому для однолистості функції Жуковського в деякій області D необхідно і досить, щоб ця область не мала пари різних точок, що задовольняють умові $z_1 z_2 = 1$. Такими областями є, наприклад, зовнішність $|z| > 1$ одиничного круга (при цьому $|z_1 z_2| > 1$) і внутрішність $|z| < 1$ цього круга ($|z_1 z_2| < 1$).

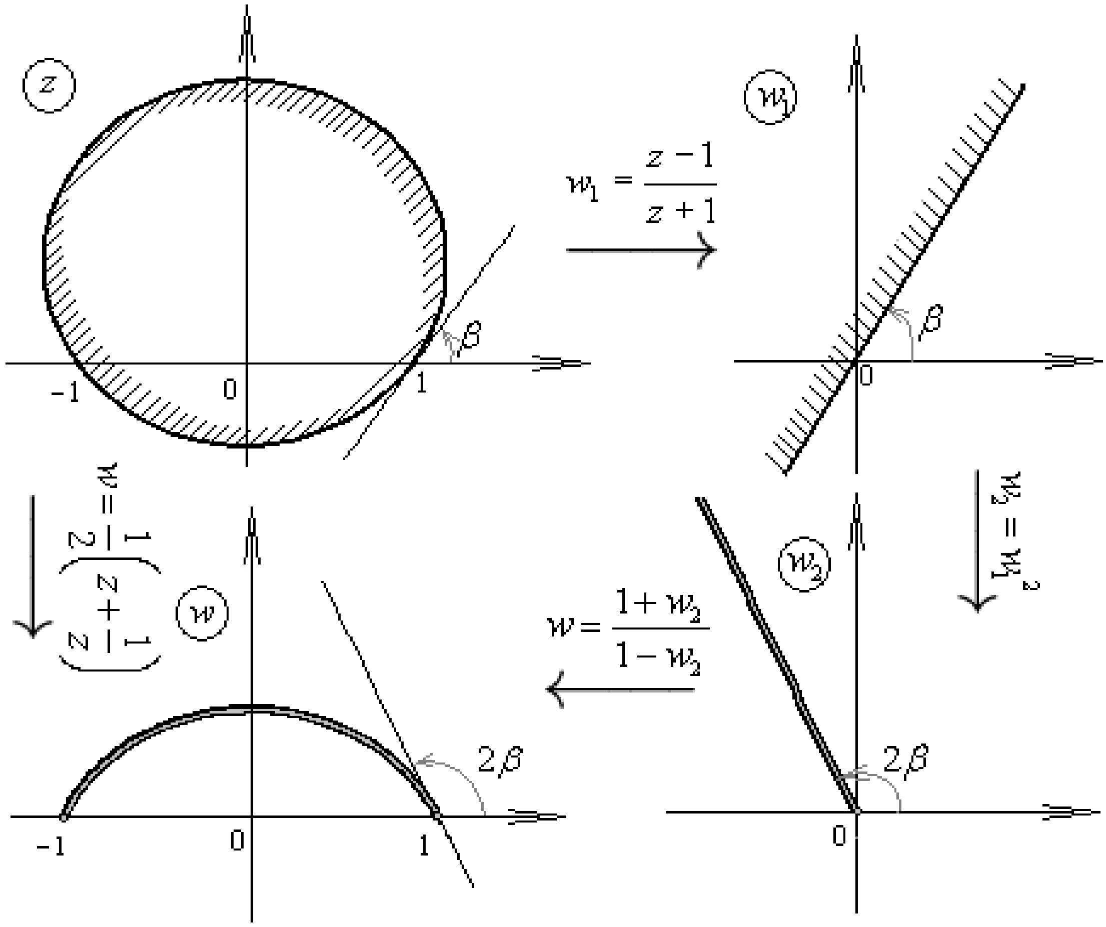
Нехай Γ – коло, що проходить через точки 1 і -1 та перетинає дійсну вісь під кутом β. Розглянемо, в яку область відображає функція $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ зовнішність цього кола. Для цього перепишемо функцію Жуковського у вигляді

$$w = \frac{1 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2}{1 - \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2}$$

і представимо її як композицію трьох простих функцій

$$w_1 = \frac{z-1}{z+1},\ w_2 = w_1^2,\ w = \frac{1+w_2}{1-w_2}.$$

При дробово-лінійному перетворенні $w_1 = \frac{z-1}{z+1}$ зовнішність кола Γ відображається в напівплощину $\beta - \pi < \arg w_1 < \beta$. Квадратичне перетворення $w_2 = w_1^2$ відображає цю напівплощину в площину з розрізом уздовж променя $\arg w_1 = 2\beta$. Нарешті, при дробово-лінійному перетворенні $w = \frac{1+w_2}{1-w_2}$ промінь відображається в дугу кола з кінцями в точках $w = \pm 1$, яка утворює кут 2β з дійсною віссю. В результаті функція Жуковського відображає зовнішність Γ на w-площину з розрізом уздовж дуги вказаного кола. У таку ж область відображається внутрішність цього кола.



При $\beta = \pi/2$ коло Γ представляє одиничне коло $|z| = 1$. Функція Жуковського відображає зовнішність одиничного круга в w-площину з розрізом уздовж відрізка дійсної вісі $[-1, 1]$. При цьому полярна мережа в зовнішності круга відображається в мережу софокусних еліпсів і гіпербол з фокусами в точках $w = \pm 1$.

Приклад 4.4. *Знайти, на яку область відображається чверть круга радіусу* $\frac{1}{2}$ *за допомогою функції* $w = z + \frac{1}{z}$.

Нехай $z = re^{i\varphi}$, $\quad w = u + iv$. Оскільки $w = z + \frac{1}{z}$, то

$$w = u + iv = \left(re^{i\varphi} + \frac{1}{re^{i\varphi}}\right) = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi,$$

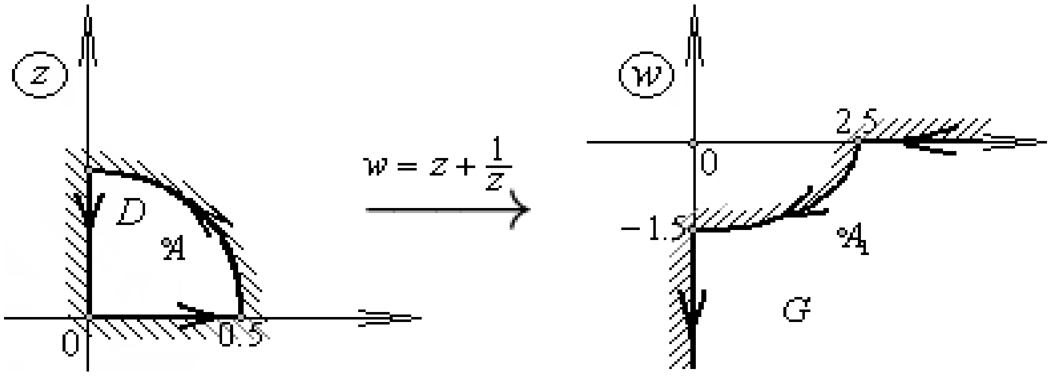
звідки

$$\begin{cases} u = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi, \\ v = \left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi. \end{cases} \tag{4.4}$$

З'ясуємо, в яку криву переходить межа області D при відображенні $w = z + \frac{1}{z}$. Припустимо, що межа обходиться, починаючи від точки $z = 0$, в додатному напрямі (тобто так що при обході область D залишається зліва). З формул (4.4) витікає, що

- відрізок дійсної вісі $\{0 \le r \le 0.5,\ \varphi = 0\}$ z-площини перейде в промінь $\{u \ge 2.5, \quad v = 0\}$ дійсної вісі w-площини;
- чверть кола $\{r = 0.5,\ 0 \le \varphi \le \pi/2\}$ перейде в чверть еліпса $\{\frac{u^2}{(0.5+\frac{1}{0.5})^2} + \frac{v^2}{(0.5-\frac{1}{0.5})^2} = 1\}$;
- відрізок уявної вісі $\{0 \le r \le 0.5,\ 0 \le \varphi \le \pi/2\}$ перейде в промінь $\{v \le -1.5, \quad u = 0\}$ уявної вісі w-площини.

Легко бачити, що кожна внутрішня точка z чверті круга D перейде у внутрішню точку G w-площини, і при цьому вся G буде заповнена образами точок z повністю, без жодних "дірок".



4.5. Показникова функція

Приклад 4.5.

З'ясувати, у що перейде при відображенні $w = e^z$

1) прямокутна сітка $x = x_0,\ y = y_0$;

2) прямокутник $\alpha < x < \beta, \quad \gamma < y < \delta,\ (\delta - \gamma) \le 2\pi$.

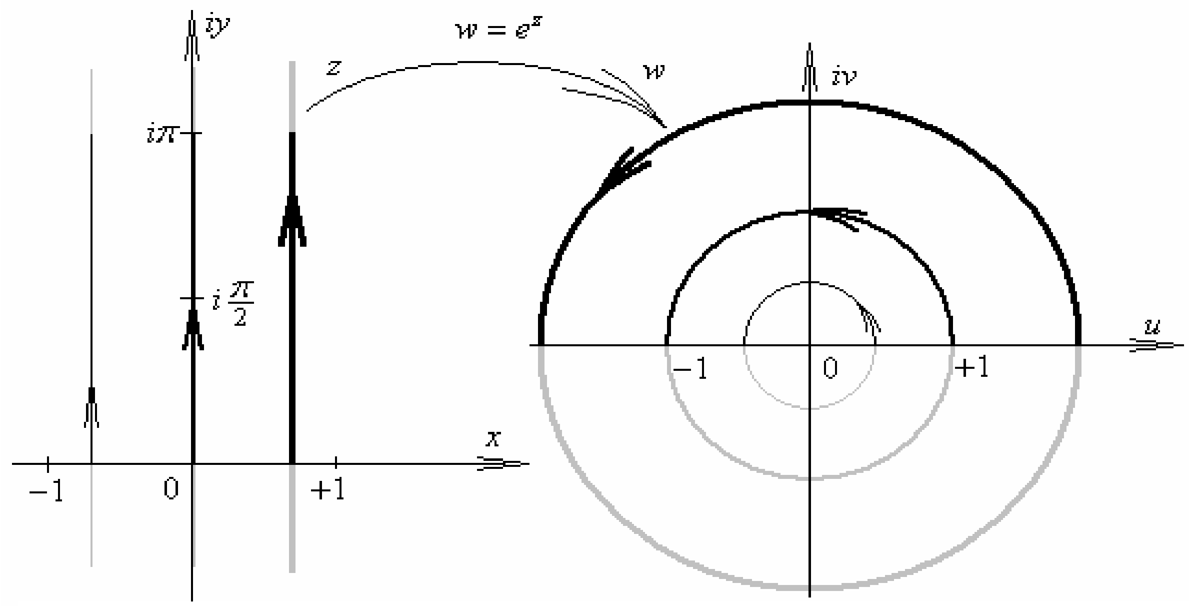
Нехай $w = u + iv,\ z = x + iy$. Тоді

$$w = u + iv = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \text{ таким чином } \begin{cases} u = e^x \cos y \\ v = e^x \ \sin y \end{cases}.$$

1) Спершу розглянемо вертикальні прямі $x = x_0,\ y \in \mathbb{R}$ в z-площині. Це відображення переведе будь-яку таку пряму в криву з параметричними рівняннями

$$\begin{cases} u = e^{x_0} \cos y \\ v = e^{x_0} \ \sin y \end{cases},\ y \in \mathbb{R} \ \begin{bmatrix} r_0 = e^{x_0}, \\ \varphi = y \end{bmatrix} \ \Rightarrow \ \begin{cases} u = r_0 \cos \varphi \\ v = r_0 \sin \varphi \end{cases},\ \varphi \in \mathbb{R}.$$

Це коло радіуса $r_0 = e^{x_0}$, що багаторазово пробігається проти годинникової стрілки.

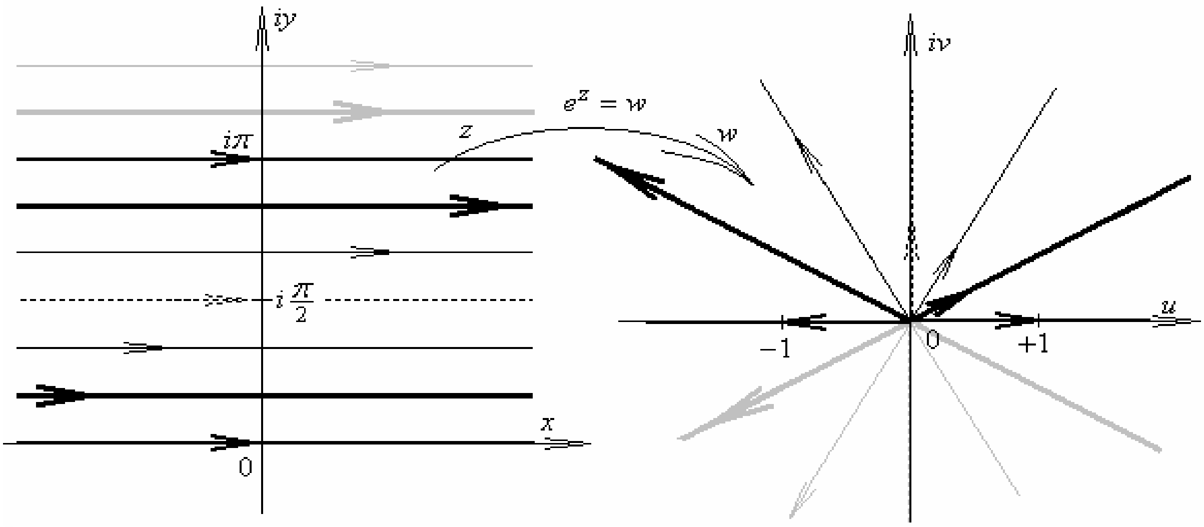


Тепер розглянемо горизонтальні прямі $y = y_0,\ x \in \mathbb{R}$ в z-площині. Це відображення переводить будь-яку таку пряму в криву, з параметричними рівняннями

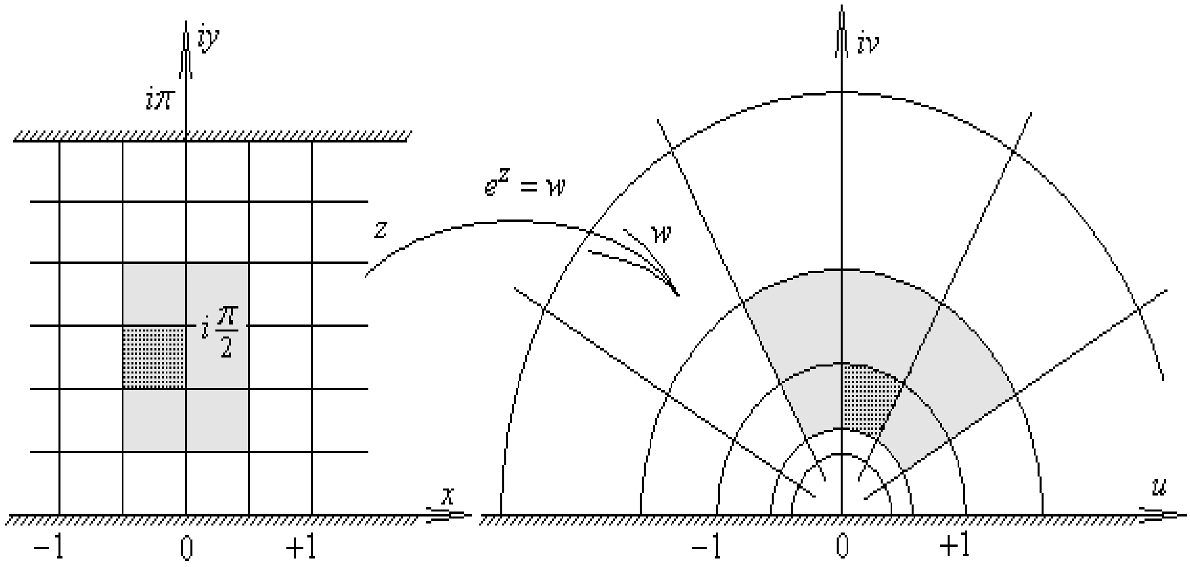
$$\begin{cases} u = e^x \cos y_0 \\ v = e^x \sin y_0 \end{cases},\ x \in \mathbb{R}\ \begin{bmatrix} r = e^x, \\ \varphi_0 = y_0 \end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{cases} u = r \cos \varphi_0 \\ v = r \sin \varphi_0 \end{cases},\ r \in (0; +\infty).$$

Це є промінь, що виходить з початку координат під кутом $\varphi_0 = y_0$.

Отже, декартова прямокутна сітка z-площини $\{x = const,\ y = const\}$ відображенням $w = e^z$ переводиться в полярну сітку w-площини $\{r = const,\ \varphi = const\}$.



2) Горизонтальна смуга $\{0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ z-площини відображенням $w = e^z$ перетворюється в w-площині у верхню півплощину $\{\operatorname{Im} w > 0\}$.



4.6. Тригонометричні функції

Приклад 4.6. *З'ясувати, у що перейде при відображенні* $w = \cos z$
1) прямокутна сітка $x = x_0,\ y = y_0$;
2) півсмуга $0 < x < \pi, y < 0$.

Нехай $w = u + iv,\ z = x + iy$. Тоді

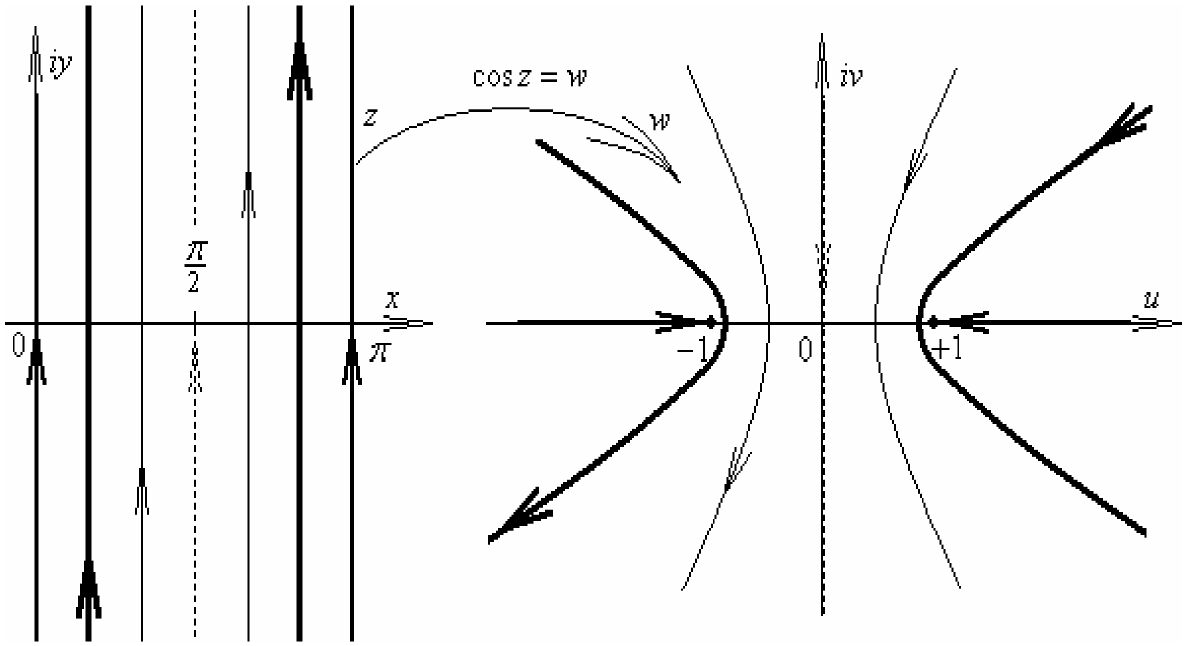
$$w = u + iv = \cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y,$$

так що $\begin{cases} u = \cos x \ \operatorname{ch} y \\ v = -\sin x \ \operatorname{sh} y \end{cases}$.

1) Розглянемо спочатку в z-площини сім'ю вертикальних прямих $x = x_0$ $(y \in \mathbb{R})$. Дане відображення перетворить будь-яку таку пряму в криву, задану параметричними рівняннями $(y \in \mathbb{R})$

$$\begin{cases} u = \cos x_0 \ \operatorname{ch} y \\ v = -\sin x_0 \ \operatorname{sh} y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{u}{\cos x_0} = \operatorname{ch} y \\ \frac{v}{\sin x_0} = -\operatorname{sh} y \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{u}{\cos x_0}\right)^2 - \left(\frac{v}{\sin x_0}\right)^2 = 1.$$

Після перепозначень $a^2 = \cos^2 x_0, b^2 = \sin^2 x_0$ стає очевидно, що це гілка гіперболи $\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} = 1$ з фокусами в точках $(1; 0)$ і $(-1; 0)$.

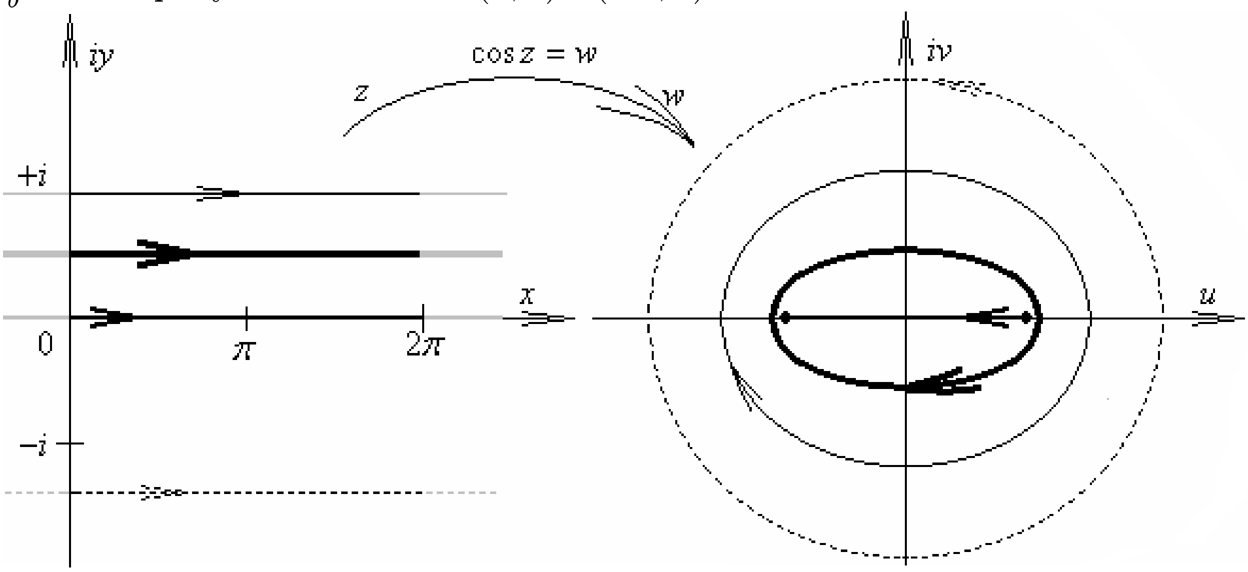


Розглянемо далі в z-площини сім'ю горизонтальних прямих $y = y_0,\ x \in \mathbb{R}$. Дане відображення перетворить будь-яку таку пряму в криву з параметричними рівняннями

$$\begin{cases} u = \cos x \operatorname{ch} y_0, \\ v = -\sin x \operatorname{sh} y_0, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R} \implies \begin{cases} \frac{u}{\operatorname{ch} y_0} = \cos x \\ \frac{v}{\operatorname{sh} y_0} = -\sin x \end{cases} \implies$$

$$\left(\frac{u}{\operatorname{ch} y_0}\right)^2 + \left(\frac{v}{\operatorname{sh} y_0}\right)^2 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

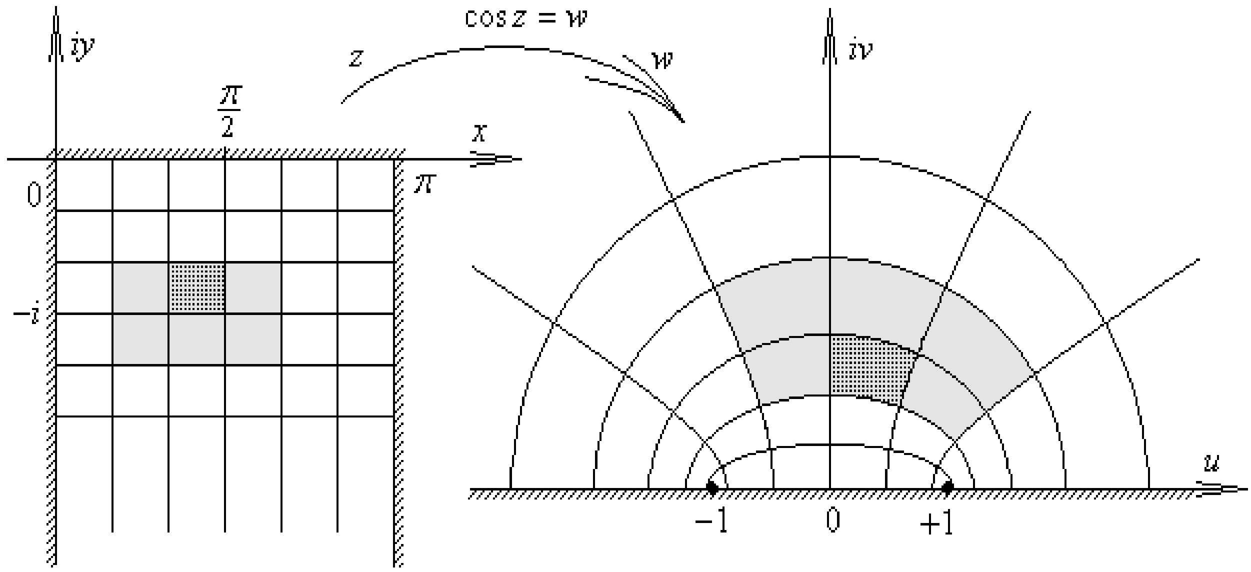
Після перепозначень $a^2 = \operatorname{ch}^2 y_0,\ b^2 = \operatorname{sh}^2 y_0$ видно, що це еліпс $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$ з фокусами в точках $(1;0)$ і $(-1;0)$.



2) Вертикальну нижню півсмугу

$$\{0 < \operatorname{Re} z < \pi,\ -\infty < \operatorname{Im} z < 0\}$$

у z-площині відображення $w = \cos z$ переводить у верхню півплощину $\{\operatorname{Im} w > 0\}$ у w-площині.



4.7. Контрольні запитання

1. Яка функція здійснює конформне відображення кута

$$0 < \arg z < \pi\gamma \quad (0 < \gamma \leq 2)$$

на верхню півплощину?

2. Означення дробово-лінійної функції.

3. Означення функції Жуковського.

4. Напишіть дробово-лінійну функцію яка переводить три точки z-площини у три точки w-площини.

5. У що перейде при відображенні $w = e^z$ прямокутна сітка

$$x = x_0, \quad y = y_0?$$

6. У що перейде при відображенні $w = \cos z$ прямокутна сітка

$$x = x_0, \quad y = y_0?$$

4.8. Задачі для самостійного розв'язання

<table>
<tr><th>Аудиторні вправи.</th><th>Домашні вправи.</th></tr>
<tr><td colspan="2">3.1. Знайти образи дійсної $\{\operatorname{Im} z = 0\}$, уявної $\{\operatorname{Re} z = 0\}$ вісій та одиничного круга $\{|z| < 1\}$ при лінійному відображенні</td></tr>
<tr><td>1) $w = (1+i)z + 1 - i$.</td><td>2) $w = (\sqrt{3}+i)z + 2 + i$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3.2. Знайти образи дійсної $\{\operatorname{Im} z = 0\}$, уявної $\{\operatorname{Re} z = 0\}$ вісій та даних кіл C_1, C_2 при дробово-лінійному відображенні</td></tr>
<tr><td>1) $w = \dfrac{z-i}{z-1}$,
$C_1 = \{|z| = 1\}, C_2 = \{|z-1| = 1\}$.</td><td>2) $w = \dfrac{z+1}{z-i}$,
$C_1 = \{|z| = 1\}, C_2 = \{|z-i| = 1\}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3.3. Знайти образи полярної координатної сітки $\{r = const,\ \varphi = const\}$ при відображенні степеневою функцією</td></tr>
<tr><td>1)$w = z^2$;
2)$w = \sqrt[3]{z}$, $\left(\sqrt[3]{1} = 1\right)$.</td><td>3)$w = z^3$;
4)$w = \sqrt{z}$, $\left(\sqrt{1} = 1\right)$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3.4. Знайти образи координатної сітки $\{x = const,\ y = const\}$ при відображенні експонентою</td></tr>
<tr><td>1) $w = e^z$.</td><td>2) $w = e^{iz}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3.5. Знайти образи полярної координатної сітки $\{r = const,\ \varphi = const\}$ при відображенні функцією Жуковського</td></tr>
<tr><td>1) $w = \frac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.</td><td>2) $w = \frac{1}{2}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3.6. Знайти образи координатної сітки $\{x = const,\ y = const\}$ при відображеннях тригонометричними та гіперболічними функціями</td></tr>
<tr><td>1) $w = \cos z$; 2) $w = \operatorname{ch} z$.</td><td>3) $w = \sin z$; 4) $w = \operatorname{sh} z$.</td></tr>
</table>

5. Похідна. Геометричний зміст

5.1. Дослідження функцій на $\mathbb{C}$–диференційовність, умови Коші-Рімана, обчислення похідної

Нехай функція $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y),\ z = x + iy$ визначена в області G. Візьмемо точку $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$, додамо їй приріст $z_0 + \triangle z \in G$, тоді $\triangle w = f(z_0 + \triangle z) - f(z_0) = \triangle u + i\triangle v$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \triangle u = u(x_0 + \triangle x; y_0 + \triangle y) - u(x_0; y_0), \\ \triangle v = v(x_0 + \triangle x; y_0 + \triangle y) - v(x_0; y_0). \end{cases}$$

Похідною функції $w = f(z)$ у точці z_0 називається

$$f'(z_0) = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{\triangle w}{\triangle z} = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{f(z_0 + \triangle z) - f(z_0)}{\triangle z},$$

якщо ця границя існує, скінченна та не залежить від способу прямування $\triangle z$ до нуля.

Теорема.

У точці z_0 існує $f'(z)$

$\Longleftrightarrow$

приріст функції $\triangle f(z_0) = f(z_0 + \triangle z) - f(z_0)$ у точці z_0 допускає виділення лінійної головної частини

$$\triangle f(z_0) = A \cdot \triangle z + \overline{o}(|\triangle z|),$$

(тобто $f(z)$ диференційовна в точці z_0). Причому $A = f'(z_0)$.

Теорема. (Критерій диференційовності).

Для того, щоб функція $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ була диференційовна в точці $z_0 = x_0 + iy_0$

$\Leftrightarrow$

1) існували неперервні частинні похідні $u(x,y)$ і $v(x,y)$;

2) виконувалися **умови Коші-Рімана:** $\begin{cases} u'_x(x_0,y_0) = \ \ v'_y(x_0,y_0) \\ u'_y(x_0,y_0) = -v'_x(x_0,y_0) \end{cases}.$

Зауваження.

Якщо аргумент функції $f(z)$ заданий у тригонометричній формі $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то умови Коші-Рімана зручніше записати у вигляді:

$$\begin{cases} ru'_r = \ \ v'_\varphi \\ u'_\varphi = -rv'_r \end{cases}.$$

Функція $w = f(z)$ називається *аналітичною* в області G, якщо вона в кожній точці цієї області має похідну.

Приклад 5.1. *Перевірити виконання умов Коші-Рімана для функцій z^n. Довести, що $(z^n)' = nz^{n-1}$.*

$$w = z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \Longrightarrow \begin{cases} u = r^n \cos n\varphi \\ v = r^n \sin n\varphi \end{cases}.$$

Тоді з $\begin{cases} u'_r = nr^{n-1}cosn\varphi \\ u'_\varphi = -nr^n \sin n\varphi \\ v'_r = nr^{n-1}sinn\varphi \\ v'_\varphi = \ \ nr^n \cos n\varphi \end{cases}$ і $\begin{cases} ru'_r = \ nr^n \cos n\varphi \ = \ \ v'_\varphi \\ \ u'_\varphi \ = -nr^n \sin n\varphi = -rv'_r \end{cases}$
випливає виконання умов Коші-Рімана. В силу диференційовності даних функцій як дійсних функцій двох змінних отримуємо, що z^n диференційовна в комплексному сенсі в $\mathbb{C}$.

Приклад 5.2. 1)*Показати, що функція $f(z) = \sqrt[3]{xy}$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$ задовольняє в точці $z = 0$ умовам Коші-Рімана, але не диференційовна в цій точці. Дослідити $f(z)$ на диференційовність в інших точках площини $\mathbb{C}$.*

Нехай $w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, тоді $\begin{cases} u = \sqrt[3]{xy} \\ v = 0 \end{cases}$.

Обчисливши (за визначенням) частинні похідні, отримаємо

$$u'_x = \lim_{\triangle:x\to 0} \frac{u(0+\triangle x\ 0) - u(0;0)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x\to 0} \frac{\sqrt[3]{\triangle x \cdot 0}}{\triangle x} = [\triangle x \neq 0] = 0,$$

аналогічно $u'_y = 0$, $v'_y = 0$, $-v'_x = 0$. Таким чином, умови Коші-Рімана в точці $z = 0$ виконані.

Доведемо, що $f(z)$ не диференційовна в точці $z = 0$, тобто не існує скінченної границі при $\triangle z \to 0$ виразів

$$\lim_{\triangle x\to 0} \frac{f(0+\triangle z) - f(0)}{\triangle z} = \lim_{\triangle x\to 0} \frac{\sqrt[3]{\triangle x \triangle y}}{\triangle x + i\triangle y}.$$

Якщо $\triangle x \neq 0$, $\triangle y = 0$, тоді границя існує та дорівнює 0. А якщо $\triangle x = \triangle y \neq 0$, тоді

$$\lim_{\triangle x\to 0} \frac{\sqrt[3]{(\triangle x)^2}}{(1+i)\triangle x} = \lim_{\triangle x\to 0} \frac{1}{(1+i)\sqrt[3]{\triangle x}} = \infty.$$

Нехай $z = x + iy \neq 0$. Тоді функції $u(x,y)$, $v(x,y)$ як функції двох дійсних змінних диференційовні в точці (x,y) і

$$u'_x = \frac{y}{3\sqrt[3]{x^2y^2}} = \frac{\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}} \neq 0, \quad u'_y = \frac{x}{3\sqrt[3]{x^2y^2}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{y^2}} \neq 0;$$

$$v'_y = 0, \quad -v'_x = 0.$$

Отже, умови Коші-Рімана не виконуються, і тому функція $f(z)$ не диференційовна в точці $z = 0$.

2) *Чи є функція $w = z\overline{z}$ аналітичною хоч би в одній точці?*

Оскільки $z\overline{z} = x^2 + y^2$, то $u(x,y) = x^2 + y^2, \quad v(x,y) = 0$.

Умови Коші-Рімана в цьому випадку мають вигляд $\begin{cases} u'_x = 2x = v'_y = 0 \\ u'_y = 2y = -v'_x = 0 \end{cases}$ та виконуються лише в точці $(0;0)$.

Отже, функція $w = z\overline{z}$ диференційовна тільки в точці $z = 0$ і ніде не є аналітичною.

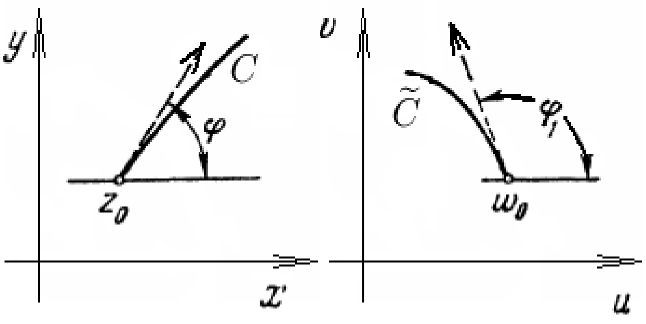
Покажемо її диференційовність в точці $z = 0$ за визначенням. Оскільки $w(0) = 0$, то $\triangle w = w(0 + \triangle z) - w(0) = \triangle z\overline{\triangle z}$ і

$$w'(0) = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{\triangle w}{\triangle z} = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{\triangle z\overline{\triangle z}}{\triangle z} = \lim_{\triangle z \to 0} \overline{\triangle z} = \lim_{\triangle z \to 0} (\triangle x - i\triangle y) = 0.$$

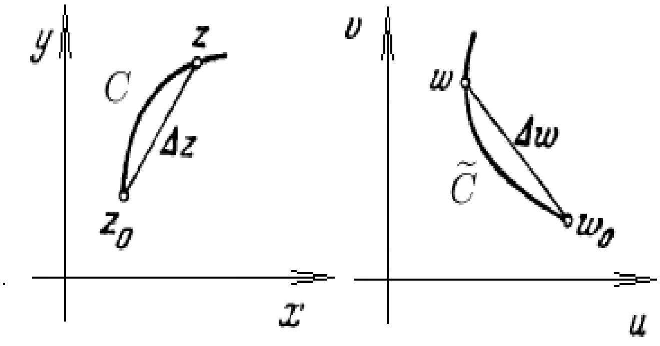
Таким чином, похідна $w'(0)$ існує та дорівнює 0.

5.2. Геометричний зміст похідної

Нехай $w = w(z)$ – аналітична функція в околі точки z_0 (функції $\mathrm{Re}\, w(x+iy)$ і $\mathrm{Im}\, w(x+iy)$ мають неперервні частинні похідні в цьому околі точки z_0) і $w'(z_0) \neq 0$. Для кожної гладкої кривої C, що проходить через точку z_0, визначимо дві величини:



• φ — кут, утворений дотичним вектором кривої C у точці z_0 і додатним напрямом дійсної вісі в z-площині, а φ_1 — кут, утворений дотичним вектором кривої $\widetilde{C}$ — образу кривої C при відображенні $w = w(z)$, з додатним напрямом дійсної вісі в w-площині (у обох кривих є напрям, і дотичні вектори вважаються направленими в ту ж сторону, що й криві). *Величина* $\varphi_1 - \varphi = \theta$ *називається* ***кутом повороту кривої*** C *у точці* z_0.



• Нехай z – довільна точка кривої C, "близька" до точки z_0. Позначимо $\triangle z = z - z_0$, $\triangle w = w(z) - w(z_0)$. ***Коефіцієнтом лінійного розтягнення (стиснення) кривої*** C *в точці* z_0 *називається границя*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|\triangle w|}{|\triangle z|} = |w'(z_0)| = k,$$

яка завжди існує через аналітичність функції $w = w(z)$ в околі точки z_0.

Геометричний зміст

• модуля похідної $|f'(z_0)|$ полягає в тому, що він рівний коефіцієнту лінійного розтягнення (стиснення) нескінченно малих векторів в точці z_0 :

$$|f'(z_0)| = k;$$

• аргументу похідної $\text{Arg } f'(z_0)$ полягає в тому, що він рівний куту повороту нескінченно малих векторів в точці z_0 :

$$\text{Arg } f'(z_0) = \theta.$$

Взаємно однозначне й неперервне відображення плоскої області G на плоску область $\widetilde{G}$ називається *конформним,* якщо воно в будь-якій точці області G задовольняє умовам:
• постійність розтягнень та
• збереження кутів,
(тобто є конформним у будь-якій точці області G).

Теорема. (Ріман.) *Нехай* G *і* $\widetilde{G}$ *однозв'язні області, їх межі складаються більш ніж з однієї точки.*
$\Longrightarrow \qquad \exists\ w = f(z)$, *що відображає конформно* G *на* $\widetilde{G}$.

Таке відображення не єдине. Щоб виділити єдине відображення, досить, щоб $z_0 \in G \mapsto f(z_0) = w_0 \in \widetilde{G}$ і $\arg f'(z_0) = \theta$.

Принцип відповідності меж.

Нехай G і $\widetilde{G}$ однозв'язні області з межами ∂G і $\partial\widetilde{G}$. Причому $\partial\widetilde{G}$ обмежена. Нехай в G визначена функція $f(z)$, що задовольняє умовам:
1) $f(z)$ – однозначна і аналітична в G;
2) $f(z)$ – неперервна в $\overline{G}$;
3) $f(z)$ відображає ∂G і $\partial\widetilde{G}$ взаємно однозначно зі збереженням напряму обходу (щодо областей G і $\widetilde{G}$)
$\Longrightarrow$
функція $w = f(z)$ відображає G на $\widetilde{G}$ конформно.

Приклад 5.3. *Знайти кут повороту θ напряму, що виходить з точки $z_0 = 1 + i$, і коефіцієнт розтягнення k для $f(z) = z^3$.*

Оскільки $f'(z_0) = 3z_0^2 = 3(1+i)^2 = 3(1+2i+i^2) = 3(1+2i-1) = 6i$, то кут повороту нескінченно малих векторів в точці z_0 рівний

$$\theta = \arg f'(z_0) = \arg 6i = \frac{\pi}{2},$$

а коефіцієнт розтягнення рівний

$$k = |f'(z_0)| = |6i| = 6.$$

Приклад 5.4. *Яка частина площини стискається, а яка розтягується, якщо відображення здійснюється функцією* $\ln z$?

Оскільки $k = |w'(z)| = \left|\frac{1}{z}\right|$, то стиснення відбувається при $k < 1$, тобто при $|z| > 1$ (зовнішність одиничного круга); розтягнення — при $k > 1$, тобто при $|z| < 1$ (внутрішність одиничного круга).

Приклад 5.5. *Відобразити півплощину* $\mathrm{Im} z > 0$ *на одиничний круг* $|w| < 1$ *так, щоб* $w(z_0) = 0,\ \arg w'(z_0) = \alpha,\ \mathrm{Im}\ z_0 > 0.$

Дробово-лінійна функція вигляду

$$w = e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\overline{a}}, \qquad \frac{a-\overline{a}}{2i} = \mathrm{Im}\, a > 0, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

переводить верхню півплощину $\mathrm{Im}\ z > 0$ у внутрішність одиничного круга $|w| < 1$, дійсну вісь — в одиничне коло, нижню півплощину — в зовнішність одиничного круга $a \to 0$ (див. стор. 30).

Візьмемо $a = z_0$, залишилося вибрати θ, використовуючи умову $\arg w'(z_0) = \alpha$.

$$w'(z) = e^{i\theta}\frac{z-\overline{z}_0 - z + z_0}{(z-\overline{z}_0)^2} = e^{i\theta}\frac{z_0-\overline{z}_0}{(z-\overline{z}_0)^2};$$

$$w'(z_0) = \frac{e^{i\theta}}{z_0 - \overline{z}_0} = \frac{e^{i\theta}}{2i \cdot \operatorname{Im} z_0} = \frac{-i\ e^{i\theta}}{2 \operatorname{Im} z_0} = \frac{e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})}}{2 \operatorname{Im} z_0},$$

$$\frac{1}{2 \operatorname{Im} z_0} > 0, \text{ бо } \operatorname{Im} z_0 > 0;$$

$$\operatorname{Arg} w'(z_0) = \theta - \frac{\pi}{2} = \alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \theta = \frac{\pi}{2} + \alpha.$$

Відповідь: $w(z) = e^{i(\frac{\pi}{2} + \alpha)} \dfrac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}$.

Приклад 5.6. *Відобразити круг* $|z| < 1$ *на круг* $|w| < 1$ *так, щоб* $w(z_0) = 0,\ \arg w'(z_0) = \alpha$.

Дробово-лінійна функція вигляду:

$$w = e^{i\theta} \frac{R(z - a)}{R^2 - \overline{a}z}, \quad |a| < R,\ \theta \in \mathbb{R}$$

переводить внутрішність круга $|z| < R$ у внутрішність одиничного круга $|w| < 1$, межу — в межу, зовнішність — у зовнішність, a переводить у ноль (див. стор. 30).

Візьмемо $a = z_0,\ R = 1$, залишилося вибрати θ, використовуючи умову $\arg w'(z_0) = \alpha$.

$$w'(z) = e^{i\theta} \frac{1 - z\overline{z}_0 + \overline{z}_0(z - z_0)}{(1 - z\overline{z}_0)^2} = e^{i\theta} \frac{1 - |z_0|}{(1 - z\overline{z}_0)^2};$$

$$w'(z_0) = e^{i\theta} \frac{1}{1 - |z_0|} = \frac{1}{1 - |z_0|}; e^{i\theta},\ \frac{1}{1 - |z_0|} > 0, \quad \text{оскільки } |z_0| < 1;$$

$$\operatorname{Arg} w'(z_0) = \theta = \alpha.$$

Відповідь: $w(z) = e^{i\alpha} \dfrac{z - z_0}{1 - z\overline{z}_0}$.

5.3. Гармонічні функції

Якщо $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y),\ z = x + iy$ аналітична функція, то $u(x, y)$ і $v(x, y)$ нескінченно диференційовні. Припустимо, що $u(x, y)$ і $v(x, y)$ мають неперервні другі частинні похідні, тоді з умов Коші-Рімана отримуємо

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \ \ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial \partial x} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 - \text{ рівняння Лапласа для } u(x, y).$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \partial x} = \ \ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 - \text{ рівняння Лапласа для } v(x, y).$$

Функція $f(x,y)$, що задовольняє в області G рівнянню Лапласа

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0,$$

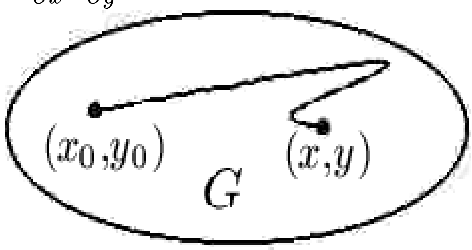
називається *гармонійною* в цій області.

Таким чином, дійсна і уявна частини аналітичної функції є гармонійними функціями.

Гармонійні функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$, що задовольняють умовам Коші-Рімана, називаються *спряженими гармонійними функціями.*

Причому якщо одна із спряжених гармонійних функцій задана, то другу легко знайти з точністю до постійного доданку.

Нехай $u(x,y)$ — одна із спряжених гармонійних функцій. Оскільки вони задовольняють умовам Коші-Рімана, то нам відомі не тільки $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$, але і $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$. Отже:



$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy.$$

$$v(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} dv=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+C.$$

Приклад 5.7. *Знайти аналітичну функцію $w=f(z)$, якщо відома її дійсна частина $u(x,y)=2e^x\cos\,y$ та $f(0)=4$.*

Оскільки $u'_x=2e^x\cos\,y$, то за першою з умов Коші-Рімана $v'_y=u'_x=2e^x\cos\,y$. Звідси

$$v(x,y)=\int v'_y\,dy=\int 2e^x\cos\,y\,dy=2e^x\sin\,y+\varphi(x),$$

де функція $\varphi(x)$ поки що невідома. Диференціюючи $v(x,y)$ по x і використовуючи другу з умов Коші-Рімана, отримаємо

$$v'_x=(2e^x\sin\,y+\varphi(x))'_x=2e^x\sin\,y+\varphi'(x)=-u'_y=2e^x\sin\,y,$$

звідки $\varphi'(x)=0$, тоді $\varphi(x)=C=const$.

Отже, $v(x,y)=2e^x\sin\,y+C$, таким чином:

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=2e^x\cos\,y+i(2e^x\sin\,y+C)=2e^z+iC.$$

Постійну C знайдемо з умови $f(0)=4$, тобто $2e^0+iC=4$; $C=-2i$.

Відповідь: $f(z)=2e^z+2$.

5.4. Контрольні запитання

1) Навести означення похідної.
2) Навести означення функції диференційовної в точці $z_0 \in \mathbb{C}$.
3) Крітерій диференційовності (умови Коши-Рімана).
4) Навести означення аналітичної в області функції.
5) Навести означення гармонічної функції.

5.5. Задачі для самостійного розв'язання

<table>
<tr><th>Аудиторні вправи.</th><th>Домашні вправи.</th></tr>
<tr><td colspan="2">4.1. Перевірити виконання умов Коші-Рімана для функції $f(z)$ та знайти її похідну:</td></tr>
<tr><td>1) $f(z) = e^z$; 2) $f(z) = \cos z$.</td><td>3) $f(z) = \sin z$; 4) $f(z) = \mathrm{Ln}\, z$.</td></tr>
<tr><td>4.2.1) Довести, що функція $\overline{z}$ ніде не диференційовна.</td><td>4.2.2) Довести, що функція $z\mathrm{Re}z$ диференційовна тільки в 0.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4.3. Обчислити кут повороту θ напряму, що виходить з точки z_0 та коефіцієнт розтягу k у точці z_0 при відображенні функцією z^2 :</td></tr>
<tr><td>1) $z_0 = 1 + i$; 2) $z_0 = -\frac{1}{4}$.</td><td>3) $z_0 = 1$; 4) $z_0 = -3 + 4i$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4.4.Яка частина площини стискається (розтягується) при відображенні функцією:</td></tr>
<tr><td>1)z^2; 2) e^z.</td><td>3) $\frac{1}{z}$; 4) $z^2 + 2z$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4.5.Відобразити півплощину $\mathrm{Im}z > 0$ на одиничний круг $|w| < 1$ так, щоб</td></tr>
<tr><td>1) $w(i) = 0,\ \arg w'(i) = \frac{3\pi}{2}$.</td><td>2) $w(2i) = 0,\ \arg w'(2i) = 0$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4.6. Відобразити круг $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ так, щоб</td></tr>
<tr><td>1) $w(\frac{1}{2}) = 0,\ \arg w'(\frac{1}{2}) = 0$;
2) $w(\frac{i}{2}) = 0,\ \arg w'(\frac{i}{2}) = \frac{\pi}{2}$.</td><td>3) $w(0) = 0,\ \arg w'(0) = \frac{3\pi}{2}$;
4) $w(a) = a,\ \arg w'(a) = \alpha$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4.7.Знайти аналітичну функцію $w = f(z)$, якщо відома її</td></tr>
<tr><td>1) уявна частина $v(x,y) = 3x + 2xy$ за умови $f(-i) = 2$.</td><td>2) дійсна частина $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$ за умови $f(i) = 2i - 1$.</td></tr>
</table>

6. Інтеграли функцій комплексної змінної. Інтегральна формула Коші

6.1. Інтеграли функцій комплексної змінної

Нехай $L_{AB} = \{z = z(t), t \in [\alpha; \beta]\}$ — кусково-гладка крива з початком у точці $A = z(\alpha)$ і кінцем у точці $B = z(\beta)$, функція $w = f(z)$ неперервна на L_{AB}. Розбиття інтервалу $[\alpha; \beta]$ точками

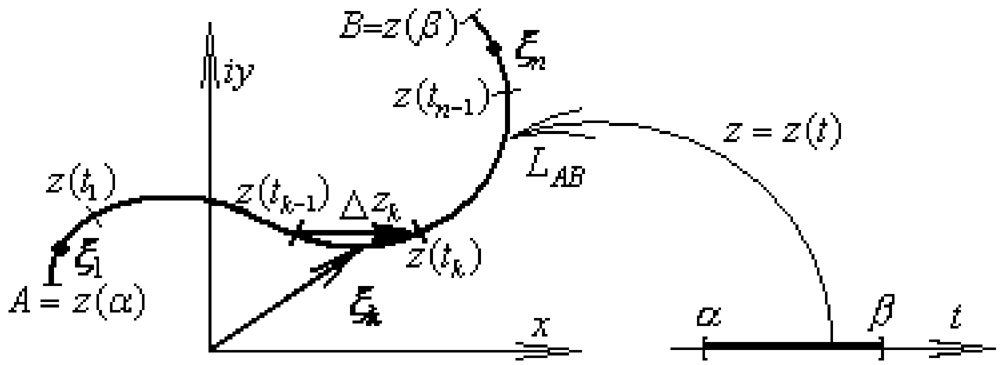
$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta,$$

дає розбиття кривої на дуги

$$L_{AB} = \bigcup_{k=1}^{n} L_k,\ L_k = \{z = z(t), t \in [t_{k-1}; t_k]\}.$$

На кожній дузі L_k виберемо довільну точку $\xi_k \in L_k$. Складемо інтегральну суму

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \triangle z_k,\ \triangle z_k = z(t_k) - z(t_{k-1}).$$



Інтегралом від функції $f(z)$ по кривій L_{AB} називається границя інтегральних сум

$$\lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \triangle z_k = \int_{L_{AB}} f(z) dz,$$

де $d = \max |\triangle z_k|$, якщо вона існує та скінченна.

Інтеграли функцій комплексної змінної обчислюють

- зведенням до дійсного криволінійного інтеграла.

Нехай $z = x + iy,\ dz = dx + idy,\ f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Тоді

$$\int_{L_{AB}} f(z) dz = \int_{L_{AB}} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{L_{AB}} v(x, y) dx + u(x, y) dy.$$

Отже інтеграл від функції комплексної змінної — це комплексне число, дійсна й уявна частини якого є дійсними криволінійними інтегралами. Тому умови існування інтеграла збігають з умовами існування дійсних криволінійних інтегралів (вивчалися в курсі математичного аналізу).

- зведенням до дійсного визначеного інтеграла.

$$\int\limits_{L_{AB}} f(z)dz = \Big[L_{AB} = \{z = z(t), t \in [\alpha; \beta]\}\Big] = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt. \qquad (6.5)$$

- за допомогою теорем Коші.

Теорема. (теорема Коші для однозв'язної області). Нехай
$f(z)$ аналітична в області G (G — однозв'язна область),
$f(z)$ неперервна в G і на її границі ∂G
$\Longrightarrow$
для будь-якої замкнутої кривої $L \subset \overline{G}$ (зокрема, $L = \partial G$)

$$\oint\limits_{L} f(z)dz = 0.$$

Теорема. (теорема Коші для багатозв'язної області). Нехай
область G обмежена скінченним числом простих кривих,
$f(z)$ аналітична в області G,
$f(z)$ неперервна в G і на її границі ∂G
$\Longrightarrow$

$$\oint\limits_{\partial G} f(z)dz = 0.$$

Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D, що містить в собі точки z_0 і z_1, тоді має місце **формула Ньютона-Лейбніца**

$$\int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0) = F(z)\Big|_{z_0}^{z_1}, \qquad (6.6)$$

де $F(z)$ – яка-небудь первісна функції $f(z)$, тобто в області D

$$F'(z) = f(z).$$

Приклад 6.1. *Обчислити інтеграл* $\int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{z-z_0}$.

Перший спосіб. Обчислимо інтеграл безпосереднім додаванням. Крива інтегрування цілком визначається рівнянням

$$z = z_0 + re^{it} = z_0 + r(\cos t + i\sin t),\ t \in [0, 2\pi].$$

Розіб'ємо відрізок $[0, 2\pi]$ на n рівних частин точками $t_k = \frac{2\pi k}{n}$, $k = 0, \cdots, n$. При цьому крива розбивається на частини точками $z(t_k) = z_0 + re^{i\frac{2\pi k}{n}}$. В якості довільних точок ξ_k візьмемо середини відрізків $[t_{k-1}; t_k]$:

$$\xi_k = z_0 + re^{\frac{i}{2}(t_{k-1}+t_k)} = z_0 + re^{\frac{i}{2}\left(\frac{2\pi(k-1)}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)} = z_0 + re^{\frac{i\pi(2k-1)}{n}}.$$

Крім того,

$$\triangle z_k = z(t_k) - z(t_{k-1}) = z_0 + re^{it_k} - z_0 - re^{it_{k-1}} = r(e^{it_k} - e^{it_{k-1}}) =$$

$$= r((\cos t_k - \cos t_{k-1}) + i(\sin t_k - \sin t_{k-1})) =$$

$$= 2r\left(-\sin\frac{t_k - t_{k-1}}{2}\sin\frac{t_{k-1}+t_k}{2} + i\sin\frac{t_k - t_{k-1}}{2}\cos\frac{t_{k-1}+t_k}{2}\right) =$$

$$= 2ir\sin\frac{t_k - t_{k-1}}{2}\left(\cos\frac{t_{k-1}+t_k}{2} + i\sin\frac{t_{k-1}+t_k}{2}\right) =$$

$$= \left[\frac{t_k - t_{k-1}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi k}{n} - \frac{2\pi(k-1)}{n}\right) = \frac{\pi}{n}\right] = 2ir\sin\frac{\pi(}{n}e^{\frac{i\pi(2k-1)}{n}},$$

$$d = \max|\triangle z_k| = \max|2ir\sin\tfrac{\pi(2k-1)}{n}e^{\frac{i\pi(2k-1)}{n}}| =$$

$$= 2r\max\left|\sin\frac{\pi}{n}\right| \longrightarrow 0, \text{при } n \to \infty.$$

Тоді

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\triangle z_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\xi_k - z_0}\triangle z_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{2ir\sin\frac{\pi}{n}e^{\frac{i\pi(2k-1)}{n}}}{z_0 + re^{\frac{i\pi(2k-1)}{n}} - z_0} =$$

$$= 2i\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{re^{\frac{i\pi(2k-1)}{n}}}r\sin\frac{\pi}{n}e^{\frac{i\pi(2k-1)}{n}} = 2i\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi}{n} = 2in\sin\frac{\pi}{n},$$

тому

$$\int\limits_{|z-z_0|=r}\frac{dz}{z-z_0} = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\triangle z_k = \lim_{n\to\infty} 2in\sin\frac{\pi}{n} = 2\pi i.$$

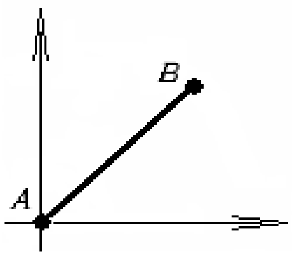
Другий спосіб. Із формули (6.5), одержимо

$$\int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{z-z_0} = \begin{bmatrix} z = z_0 + re^{it} \\ dz = rie^{it}dt \ , \\ t \in [0, 2\pi] \end{bmatrix} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{rie^{it}dt}{z_0 + re^{it} - z_0} = 2\pi i.$$

Приклад 6.2. 1) *Обчислити інтеграл* $I = \int\limits_{L_{AB}} \overline{z}dz$

a) *по відрізку прямої, що з'єднує точки* $A = 0$ *і* $B = 1 + i$*;*

Рівняння прямої, що проходить через точки $A = 0$ і $B = 1 + i$



$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-0}{1-0} \quad \Longrightarrow \quad y = x.$$

Тоді рівняння кривої інтегрування:

$$z = x + iy = x + ix = (1 + i)x, \ x \in [0, 1].$$

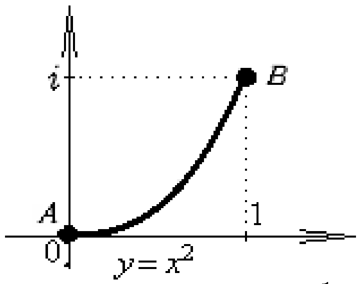
Використовуючи формулу (6.5), одержимо:

$$I = \int\limits_0^1 \overline{(1+i)x}d((1+i)x) = \int\limits_0^1 (1-i)x(1+i)dx = 2\int\limits_0^1 xdx = 1.$$

b) *по дузі параболи, що з'єднує точки* $A = 0$ *і* $B = 1 + i$*;*

Рівняння кривої інтегрування:

$$z = x + iy = x + ix^2, \ x \in [0, 1].$$

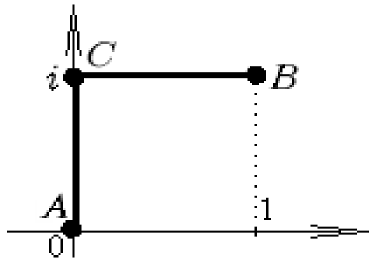


$$I = \int\limits_0^1 \overline{(x + ix^2)}d(x + ix^2) =$$

$$= \int\limits_0^1 (x - ix^2)(1 + 2ix)dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (x + x^3 + i(2x^2 - x^2))dx = \frac{3}{4} + \frac{i}{3}.$$

c) *по ламаній, що з'єднує точки* $A = 0$, $C = i$ *та* $B = 1 + i$.



Ламана $L_{ACB} = L_{AC} \bigcup L_{CB}$ цілком визначається рівняннями:

$$L_{AC} = \{z = iy,\ y \in [0,1]\},$$
$$L_{CB} = \{z = x + i,\ x \in [0,1]\}.$$

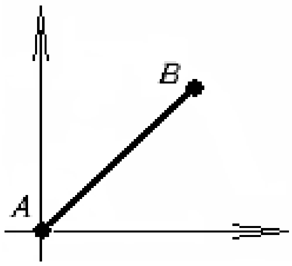
Використовуючи формулу (6.5), одержимо:

$$I = \int_0^1 \overline{(iy)}d(iy) + \int_0^1 \overline{(x+i)}d(x+i) = \int_0^1 (-iy)idy + \int_0^1 (x-i)dx = 1 - i.$$

Зауваження. Цей приклад показує, що інтеграл від неперервної, але не аналітичної функції залежить від кривої інтегрування.

2) *Обчислити інтеграл* $I = \int\limits_{L_{AB}} z\,dz$

a) *по відрізку прямої, що з'єднує точки* $A = 0$ *і* $B = 1 + i$*;*



Рівняння кривої інтегрування:
(див. попередній приклад)

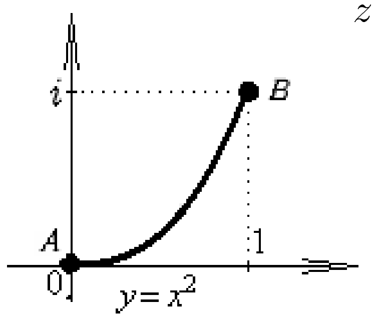
$$z = (1 + i)x,\ x \in [0,1].$$

Тому, використовуючи (6.5), одержимо

$$I = \int_0^1 (1+i)xd((1+i)x) = \int_0^1 (1+i)^2 xdx = 2i\int_0^1 xdx = i.$$

b) *по дузі параболи, що з'єднує точки* $A = 0$ *і* $B = 1 + i$*;*

Рівняння кривої інтегрування:

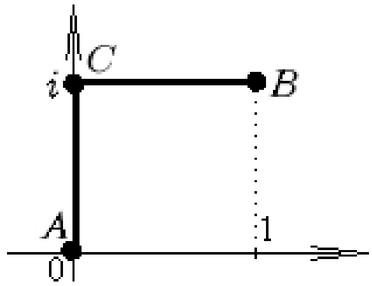


$$z = x + iy = x + ix^2,\ x \in [0,1].$$

Тому, використовуючи (6.5), одержимо

$$I = \int_0^1 (x + ix^2)d(x + ix^2) = \int_0^1 (x + ix^2)(1 +$$
$$+ 2ix)dx = \int_0^1 (x - 2x^3 + 3ix^2)dx =$$
$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} + ix^3\right)\Big|_0^1 = i.$$

c) *по ламаній, що з'єднує точки* $A = 0$, $C = i$ *та* $B = 1 + i$.



Ламана $L_{ACB} = L_{AC} \bigcup L_{CB}$ цілком визначається рівняннями

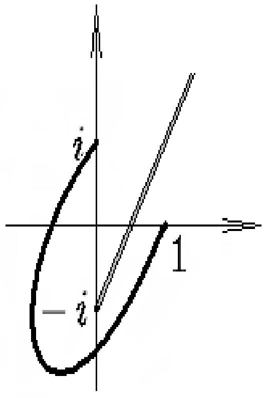
$$L_{AC} = \{z = iy,\ y \in [0,1]\},$$
$$L_{CB} = \{z = x + i,\ x \in [0,1]\}.$$

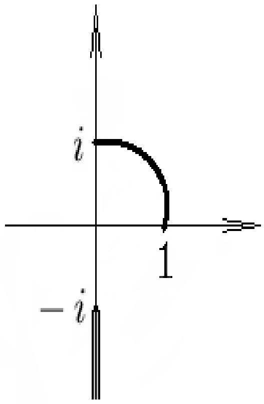
Тому, використовуючи (6.5), одержимо

$$I=\int\limits_0^1(iy)d(iy)+\int\limits_0^1(x+i)d(x+i)=\int\limits_0^1(iy)idy+\int\limits_0^1(x+i)dx=i.$$

Зауваження. Цей приклад показує, що інтеграл від аналітичної функції не залежить від кривої інтегрування.

Приклад 6.3. *Обчислити інтеграл* $\int\limits_i^1\frac{dz}{(z+i)^2}$.





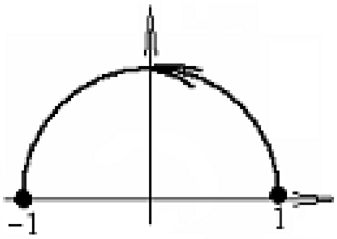
Підінтегральна функція є аналітичною всюди, окрім точки $-i$. Якщо провести розріз площини по будь-якому променю від точки $-i$ до ∞, отримаємо однозв'язну область, в якій функція є аналітичною. Інтеграл від неї можна обчислити за формулою Ньютона-Лейбніца (6.6). Тому для будь-якої кривої, що не проходить через точку $-i$, інтеграл буде незалежний від кривої інтегрування.

$$\int\limits_i^1\frac{dz}{(z+i)^2}=\frac{-1}{z+i}\bigg|_i^1=-\frac{1}{1+i}+\frac{1}{2i}=-\frac{1-i}{2}-\frac{i}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Приклад 6.4. *Обчислити інтеграл* $\int\limits_\Gamma\frac{dz}{\sqrt{z}}$, *де* Γ — *верхня дуга кола* $|z|=1$. *Для* $\sqrt{z}$ *береться та гілка, що* $\sqrt{1}=-1$.

Перший спосіб. Функція $\sqrt{z}$ має два значення:
$\sqrt{z}=\sqrt{|z|}(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2})$,
$\sqrt{z}=\sqrt{|z|}(\cos(\frac{\varphi}{2}+\pi)+i\sin(\frac{\varphi}{2}+\pi))=-\sqrt{|z|}(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2})$,
де $\varphi=\arg z$.

Значення z беруться на одиничному колі $|z|=1$, отже,
$\sqrt{z}=(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2})$, $\sqrt{z}=-(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2})$.



Умові $\sqrt{1}=-1$ задовільняє друге значення $\sqrt{z}=-(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2})$. Справді, нехай $z=1$, тоді $\arg z=0$ і $\sqrt{1}=-(\cos 0+i\sin 0)=-1$.

За формулою Ньютона-Лейбніца:
$\int\limits_\Gamma\frac{dz}{\sqrt{z}}=\int\limits_1^{-1}\frac{dz}{\sqrt{z}}=2\sqrt{z}\Big|_1^{-1}=2(\sqrt{-1}-\sqrt{1})$.

Знайдемо:
$\sqrt{-1} = -\left(\cos\frac{\arg(-1)}{2} + i\sin\frac{\arg(-1)}{2}\right) = -\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = -i$. Тоді

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2(1-i).$$

Другий спосіб. Покладемо $z = re^{i\varphi}$, де $r = 1$, бо $|z| = 1$, а φ змінюється від 0 до π. З умови $\sqrt{1} = -1$ випливає, що $\sqrt{e^{i\varphi}} = e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)}$. Тепер:

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int\limits_{1}^{\pi} \frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{\sqrt{e^{i\varphi}}} = \int\limits_{1}^{\pi} \frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)}} = \int\limits_{1}^{\pi} ie^{i\left(\frac{\varphi}{2}-\pi\right)}d\varphi =$$

$$= 2e^{i\left(\frac{\varphi}{2}-\pi\right)}\Big|_{0}^{\pi} = 2\left(e^{-i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\pi}\right) = 2(1-i).$$

6.2. Інтегральна формула Коші

Теорема. (Інтегральна формула Коші.) Нехай
$f(z)$ аналітична в області G і неперервна аж до її границі ∂G,

$$\Longrightarrow \qquad f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{f(z)}{z-\zeta}dz, \quad \forall\, \zeta \in G. \tag{6.7}$$

Теорема. Нехай
$f(z)$ аналітична в області G і неперервна аж до її границі ∂G, $(\zeta \in G)$
$\Longrightarrow$

$$\exists f^{(n)}(\zeta), n \in \mathbb{N}, \qquad f^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{f(z)}{(z-\zeta)^{n+1}}dz. \tag{6.8}$$

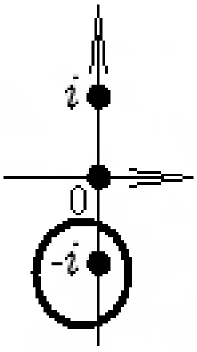
Приклад 6.5. *Обчислити інтеграл* $\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z(z^2+1)}$ *при різних положеннях кривої* Γ, *що не проходять через точки* $0, i, -i$.

Перший спосіб. Розкладемо дріб $\frac{1}{z(z^2+1)}$ на найпростіші:

$$\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z(z-i)(z+i)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-i} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+i}.$$

Підставивши це в інтеграл, дістанемо:

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z(z^2+1)} = \int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z} - \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z-i} - \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z+i}.$$



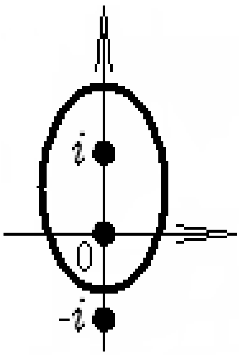
a) Розглянемо криву Г, що містить усередині точку $-i$ і не містить точки $0, i$. Функцію $\frac{1}{z+i}$ можна записати у вигляді $\frac{1}{z+i} = \frac{f_1(z)}{z+i}$, де $f_1(z) \equiv 1$. Функція $f_1(z)$ аналітична в області, обмеженій кривою Г. За формулою Коші (6.7) при $\zeta = -i$

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z+i} = 2\pi i f_1(-i) = 2\pi i.$$

Функції $\frac{1}{z}$ та $\frac{1}{z-i}$ аналітичні в області, обмеженій кривою Г, і на її границі. За теоремою Коші $\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z} = 0$ і $\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z-i} = 0$.

Таким чином,

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z(z^2+1)} = 0 - 0 - \frac{1}{2} \cdot 2\pi i = -\pi i.$$



b) Розглянемо криву Г, що містить усередині точки $0, i$ і не містить точку $-i$. Функцію $\frac{1}{z}$ можна записати у вигляді $\frac{1}{z} = \frac{f_1(z)}{z}$, де $f_1(z) \equiv 1$. Ця функція аналітична в області, обмеженій кривою Г. За формулою Коші (6.7) при $\zeta = 0$

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i f_1(0) = 2\pi i.$$

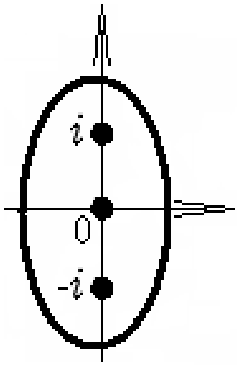
Функцію $\frac{1}{z-i}$ також можна записати у вигляді $\frac{1}{z-i} = \frac{f_1(z)}{z-i}$, де $f_1(z) \equiv 1$. Функція $f_1(z)$ аналітична в області, обмеженій кривою Г. За формулою Коші (6.7) при $\zeta = i$

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z-i} = 2\pi i f_1(i) = 2\pi i.$$

Функція $\frac{1}{z+i}$ аналітична в області, обмеженій кривою Г, і на її границі. За теоремою Коші $\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z+i} = 0$.

Таким чином,

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z(z^2+1)} = 2\pi i - \frac{1}{2} \cdot 2\pi i - 0 = \pi i.$$



c) Розглянемо криву Γ, що містить усередині точки $0, i, -i$. Використовуючи пункти a) і b), одержимо

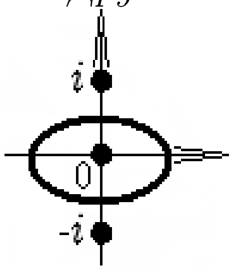
$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i f_1(0) = 2\pi i,$$

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z-i} = 2\pi i f_1(i) = 2\pi i, \quad \int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z+i} = 2\pi i f_1(-i) = 2\pi i.$$

Таким чином,

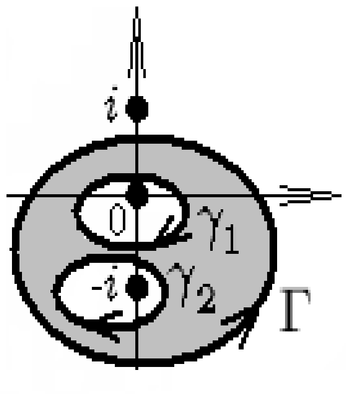
$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z(z^2+1)} = 2\pi i - \frac{1}{2} \cdot 2\pi i - \frac{1}{2} \cdot 2\pi i = 0.$$

Другий спосіб.



a) Розглянемо криву Γ, що містить усередині точку 0, а точки $i, -i$ — зовні. Функцію $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$ можна записати у вигляді $f(z) = \frac{1}{z^2+1} \cdot \frac{1}{z} = \frac{f_1(z)}{z}$, де $f_1(z) = \frac{1}{z^2+1}$. Функція $f_1(z)$ аналітична в області, обмеженій кривою Γ. За формулою Коші (6.7) при $\zeta = 0$

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i f_1(0) = 2\pi i \cdot \left. \frac{1}{z^2+1} \right|_{z=0} = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i.$$



b) Розглянемо криву Γ, що містить усередині точки $0, -i$, а точку i – зовні. Побудуємо криві γ_1 і γ_2, що містять усередині точки $z = 0$ і $z = -i$, досить маленькі, щоб вони не перетиналися і цілком лежали в області, обмеженій кривою Γ. У побудованій трьохзв'язній області, обмеженій кривими $\gamma_1, \gamma_2, \Gamma$, підінтегральна функція аналітична. За теоремою Коші для багатозв'язної області:

$$\int\limits_{\Gamma^+\bigcup\gamma_1^-\bigcup\gamma_2^-} f(z)dz = 0 \Longrightarrow \int\limits_{\Gamma^+} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_1^+} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_2^+} f(z)dz.$$

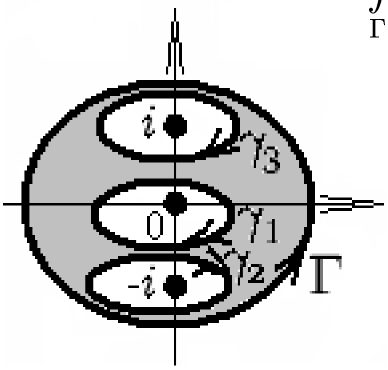
Інтеграли по кривих γ_1 і γ_2 обчислюються з використанням інтегральної формули Коші (6.7)

$$\int\limits_{\gamma_1^+} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_1^+} \frac{1}{z^2+1}\cdot\frac{dz}{z} = 2\pi i\cdot\left.\frac{1}{z^2+1}\right|_{z=0} = 2\pi i\cdot 1 = 2\pi i.$$

$$\int\limits_{\gamma_2^+} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_2^+} \frac{1}{z(z-i)}\cdot\frac{dz}{z+i} = 2\pi i\cdot\left.\frac{1}{z(z-i)}\right|_{z=-i} = 2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i.$$

Таким чином,

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z(z^2+1)} = 2\pi i - \pi i = \pi i.$$



c) Розглянемо криву Г, що містить усередині точки $0, i, -i$. Побудуємо криві γ_1, γ_2 і γ_3, що містять усередині точки $z=i$, $z=0$ і $z=-i$, досить маленькі, щоб вони не перетиналися і цілком лежали в області, обмеженій кривою Г. У побудованій чотирьохзв'язній області, обмеженій кривими $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \Gamma$, підінтегральна функція аналітична. За теоремою Коші для багатозв'язної області:

$$\int\limits_{\Gamma^+} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_1^+} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_2^+} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_3^+} f(z)dz.$$

Інтеграли по кривих γ_1, γ_2 і γ_3 обчислюються з використанням інтегральної формули Коші (6.7)

$$\int\limits_{\gamma_1^+} f(z)dz = 2\pi i, \quad \int\limits_{\gamma_2^+} f(z)dz = -\pi i,$$

$$\int\limits_{\gamma_3^+} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_3^+} \frac{1}{z(z+i)} \cdot \frac{dz}{z-i} = 2\pi i \cdot \frac{1}{z(z+i)}\bigg|_{z=i} = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i.$$

Таким чином,

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z(z^2+1)} = 2\pi i - \pi i - \pi i = 0.$$

Приклад 6.6. *Обчислити інтеграл* $I = \int\limits_{|z|=2} \frac{\mathrm{ch} z\, dz}{(z+1)^3(z-1)}$.

Перший спосіб. Коренями знаменника $(z+1)^3(z-1)$ підінтегральної функції є точки $z_1 = -1$, $z_2 = 1$. Вони лежать у колі $|z| \le 2$. Розкладемо на найпростіші дроби функцію

$$\frac{1}{(z+1)^3(z-1)} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{z-1} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{z+1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(z+1)^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(z+1)^3}.$$

$$I = \frac{1}{8} \int\limits_{|z|=2} \frac{\mathrm{ch} z\, dz}{z-1} - -\frac{1}{8} \int\limits_{|z|=2} \frac{\mathrm{ch} z\, dz}{z+1} - \frac{1}{4} \int\limits_{|z|=2} \frac{\mathrm{ch} z\, dz}{(z+1)^2} - \frac{1}{2} \int\limits_{|z|=2} \frac{\mathrm{ch} z\, dz}{(z+1)^3}.$$

До першого з двох інтегралів застосуємо інтегральну формулу Коші (6.7)

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\mathrm{ch} z\, dz}{z-1} = 2\pi i \,\mathrm{ch}\, 1,$$

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\mathrm{ch} z\, dz}{z+1} = 2\pi i \,\mathrm{ch}(-1) = 2\pi i \,\mathrm{ch}\, 1.$$

Третій і четвертий інтеграли обчислимо за допомогою формули (6.8)

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\mathrm{ch} z\, dz}{(z+1)^2} = 2\pi i (\mathrm{ch} z)'\bigg|_{z=-1} = -2\pi i \,\mathrm{sh}\, 1,$$

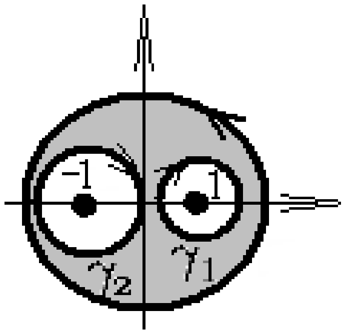
$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\mathrm{ch} z\, dz}{(z+1)^3} = \frac{2\pi i}{2!} (\mathrm{ch} z)''\bigg|_{z=-1} = \pi i \,\mathrm{ch}\, 1.$$

Остаточно одержимо:

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\mathrm{ch} z\, dz}{(z+1)^3(z-1)} = \frac{2\pi i \,\mathrm{ch}\, 1}{8} - \frac{2\pi i \,\mathrm{ch}\, 1}{8} + \frac{2\pi i \,\mathrm{sh}\, 1}{4} - \frac{\pi i \,\mathrm{ch}\, 1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(\text{sh }1 - \text{ch}1)\pi i = -\frac{\pi i}{2e}.$$

Другий спосіб.



Побудуємо кола γ_1 і γ_2 з центрами у точках $z_1 = -1$ і $z_2 = 1$ досить малих радіусів, таких, щоб вони не перетиналися і цілком лежали всередині круга $|z| \le 2$. У трьохзв'язній області, обмеженій колами $|z| = 2$, γ_1 і γ_2, підінтегральна функція всюди аналітична.

За теоремою Коші для багатозв'язної області маємо:

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\text{ch}z\, dz}{(z+1)^3(z-1)} = \int\limits_{\gamma_1} \frac{\text{ch}z\, dz}{(z+1)^3(z-1)} + \int\limits_{\gamma_2} \frac{\text{ch}z\, dz}{(z+1)^3(z-1)}.$$

До першого інтеграла правої частини застосуємо формулу (6.8), спочатку записавши підінтегральную функцію у вигляді:

$$\frac{\text{ch}z}{(z+1)^3(z-1)} = \frac{\frac{\text{ch}z}{z-1}}{(z+1)^3}.$$

Функція $\frac{\text{ch}z}{z-1}$ є аналітичною всередині γ_1, тому за формулою (6.8)

$$\int\limits_{\gamma_1} \frac{\text{ch}z\, dz}{(z+1)^3(z-1)} = \int\limits_{\gamma_1} \frac{\frac{\text{ch}z}{z-1}}{(z+1)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{\text{ch}z}{z-1}\right)''\Bigg|_{z=-1} =$$

$$= -\frac{2e^{-1} + \text{ch }1}{4}\pi i.$$

До другого інтеграла в правій частині застосуємо інтегральну формулу Коші (6.7)

$$\int\limits_{\gamma_2} \frac{\text{ch}z\, dz}{(z+1)^3(z-1)} = \int\limits_{\gamma_2} \frac{\frac{\text{ch}z}{(z+1)^3}}{z-1} dz = 2\pi i \frac{\text{ch}z}{(z+1)^3}\Bigg|_{z=1} = \pi i \frac{\text{ch }1}{4}.$$

Остаточно:

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\text{ch}z\, dz}{(z+1)^3(z-1)} = -\pi i \frac{2e^{-1} + \text{ch }1}{4} + \pi i \frac{\text{ch }1}{4} = -\frac{\pi i}{2e}.$$

6.3. Контрольні запитання

1) Теорема Коші для однозв'язної області.
2) Теорема Коші для багатозв'язної області.
3) Інтегральна формула Коші.

6.4. Задачі для самостійного розв'язання

Аудиторні вправи.	**Домашні вправи.**
5.1. Безпосереднім додаванням довести рівність	
1) $\int\limits_{z_1}^{z_2} 1dz = z_2 - z_1.$	**2)** $\int\limits_{z_1}^{z_2} z\,dz = \frac{1}{2}(z_2^2 - z_1^2).$
5.2. Обчислити інтеграл I **a)** по відрізку прямої, що з'єднує точки $A = 0$ і $B = -1 + i$; **b)** по дузі кола, що з'єднує точки $A = 0$ і $B = -1 + i$; **c)** по ламаній, що з'єднує точки $A = 0$, $C = i$ та $B = -1 + i$;	
1) $I = \int x\,dz$; **2)** $I = \int z\,dz$.	**3)** $I = \int y\,dz$; **4)** $I = \int z^2\,dz$.
5.3.1) Обчислити $\int\limits_{-i}^{1} \frac{dz}{(z-i)^2}$.	**5.3.2)** Обчислити $\int\limits_{-i}^{1} \frac{dz}{(z+1)^2}$.
5.4.1) Обчислити $\int \mathrm{Ln}\, \mathrm{z}\, dz$ по колу $\|z\| = 1$, $\mathrm{Ln}\, i = \frac{\pi i}{2}$.	**5.4.2)** Обчислити $\int \frac{dz}{\sqrt{z}}$ по колу $\|z\| = 1$, $(\sqrt{-1} = i)$.
5.5.1) Обчислити $\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z^2+9}$ при різних розташуваннях кривої Γ, що не проходять через $3i, -3i$.	**5.5.2)** Обчислити $\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z(z^2-1)}$ при різних розташуваннях кривої Γ, що не проходять через $-1, 0, 1$.
5.6.1) Обчислити $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{ze^z\,dz}{(z-a)^3}$, якщо a лежить усередині Γ.	**5.6.**Обчислити $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{e^z dz}{z(1-z)^3}$, **2)** якщо 0 – усередині Γ, 1 – поза Γ, **3)** якщо 1 – усередині Γ, 0 – поза Γ, **4)** якщо 0 і 1 – усередині Γ.

7. Ряди Тейлора. Нулі функцій

7.1. Ряди Тейлора

Степеневим рядом називається ряд вигляду

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

де a_n – постійні комплексні числа – *коефіцієнти ряду,* а z_0 – довільне фіксоване комплексне число – *центр ряду.*

Областю збіжності степеневого ряду є круг $\{\, z \in \mathbb{C} \;:\; |z - z_0| < R\}$, $0 \le R \le +\infty$. Радіус якого називається *радіусом збіжності степеневого ряду.*

Причому всередині круга збіжності (тобто в будь-якому крузі меншого радіуса) ряд збігається абсолютно і рівномірно.

Теорема. Для радіуса збіжності R мають місце формули

$$\begin{array}{ccc} \text{(формула Даламбера)} & & \text{(формула Коші)} \\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q, & \text{або} & \exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{q} \end{array} \tag{7.9}$$

Теорема. (Тейлор)

$f(z)$ аналітична в $|z - z_0| < R, \quad (0 \le R \le +\infty)$,

$\Longrightarrow$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

де $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\ 0 < r < R.$

Цей степеневий ряд називається *рядом Тейлора* аналітичної в околі точки z_0 функції $f(z)$.

Такий ряд єдиний для кожної функції. Межа кола збіжності цього ряду обов'язково проходить через найближчу до z_0 особливу точку функції $f(z)$ (тобто точку, в якій функція не є аналітичною), або областю збіжності є вся комплексна площина.

Розклад функції в ряд шляхом безпосереднього обчислення коефіцієнтів не завжди є зручним. Назвемо найбільш уживані непрямі способи розкладу в ряд Тейлора.

- Використання рядів Тейлора основних елементарних функцій:

$$
\begin{aligned}
e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \tfrac{z^2}{2} + \tfrac{z^3}{6} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots, & R = +\infty,\\
\sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \tfrac{z^3}{6} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, & R = +\infty,\\
\cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \tfrac{z^2}{2} + \tfrac{z^4}{24} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots, & R = +\infty,\\
\ln(1+z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^{n+1} z^n}{n} = z - \tfrac{z^2}{2} + \tfrac{z^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} + \ldots, & R = 1,\\
(1+z)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n z^n = 1 + \alpha z + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \ldots + \tfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \ldots, & R = 1.
\end{aligned}
$$

Зокрема, при $\alpha = -1,\ z := -z$ одержимо відому формулу суми геометричної прогресії

$$
\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots, \quad R = 1. \tag{7.10}
$$

- Почленне диференціювання або інтегрування рядів.

  Степеневий ряд можна почленно диференціювати й інтегрувати у крузі збіжності $|z - z_0| < r < R$.

$$
\tfrac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tfrac{d}{dz} (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (z - z_0)^{n-1}.
$$

$$
\int\limits_L \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\zeta - \zeta_0)^n \right) d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int\limits_L (\zeta - \zeta_0)^n d\zeta,
$$
$$
\forall\ L \subset |z - z_0| < r < R.
$$

- Метод невизначених коефіцієнтів.

  Нехай $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, де $\varphi(z)$, $\psi(z)$ – аналітичні в околі z_0 і

$$
\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \quad \psi(z_0) \neq 0.
$$

Функція $f(z)$ є аналітичною в околі точки z_0 і може бути розкладена у степеневий ряд по ступеням $z - z_0$. Його коефіцієнти знаходяться методом невизначених коефіцієнтів.

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях у рівності

$$
f(z) \cdot \psi(z) = \varphi(z),
$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

одержимо нескінченну систему рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Перші n рівнянь цієї системи містять лише n перших невідомих, що полегшує рішення системи.

Приклад 7.1.

1) *Знайти радіус збіжності степеневого ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos(in)z^n$.

$a_n = \cos(in) = \mathrm{ch}(n)$, $a_{n+1} = \cos(in+i) = \mathrm{ch}(n+1)$.

За формулою Даламбера

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\mathrm{ch}(n+1)}{\mathrm{ch}(n)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}+e^{-(n+1)}}{e^n+e^{-(n)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{e+e^{-2n-1}}{1+e^{-2n}} = e$$

Отже, $R = \frac{1}{e}$. Таким чином, ряд збігається у крузі $|z| < \frac{1}{e}$.

2) *Знайти радіус збіжності степеневого ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{\pi i}{n})z^n$.

$a_n = \sin(\frac{\pi i}{n}) = \mathrm{sh}(\frac{\pi}{n})$, $a_{n+1} = \sin(\frac{\pi i}{n+1}) = \mathrm{sh}(\frac{\pi}{n+1})$.

За формулою Даламбера

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\mathrm{sh}(\frac{\pi}{n+1})}{\mathrm{sh}(\frac{\pi}{n})}\right| = \begin{bmatrix}\mathrm{sh}\, x \sim x,\\ x\to 0\end{bmatrix} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{n+1}}{\frac{\pi}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1.$$

Отже, $R = 1$. Таким чином, ряд збігається у крузі $|z| < 1$.

3) *Знайти радіус збіжності степеневого ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2-i)^n z^n$.

$a_n = (2-i)^n$.

За формулою Коші

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|(2-i)^n|} = \lim_{n\to\infty}|(2-i)| = \sqrt{5}$$

Отже, $R = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Таким чином, ряд збігається у крузі $|z| < \frac{1}{\sqrt{5}}$.

4) *Знайти радіус збіжності степеневого ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z-2)^n}{e^{in}}$.

$a_n = \dfrac{1}{e^{in}}$. Використовуючи формули Коші та Ейлера, отримуємо:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{e^{in}}\right|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{\cos n + i\sin n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{\cos^2 n + \sin^2 n}}} = 1.$$

Отже, $R = 1$. Таким чином, ряд збігається у крузі $|z-2| < 1$.

5) *Знайти радіус збіжності степеневого ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^2} z^{2n}$.

У даному ряді коефіцієнти при непарних ступенях z дорівнюють 0, тобто $a_k = \frac{(-3)^{2n}}{(2n)^2}$, якщо $k = 2n$, і $a_k = 0$, якщо $k = 2n-1$. Тому не можна скористатися формулами (7.9), бо відповідні границі не існують. Введемо нову змінну $t = z^2$. Тоді одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^2} z^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^2} t^n,$$

радіус збіжності останнього ряду знайдемо за допомогою формули Даламбера

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-3)^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{(-3)^n}{n^2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-3)^{n+1} \cdot n^2}{(n+1)^2 \cdot (-3)^n} \right| = 3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 = 3.$$

Таким чином, радіус збіжності допоміжного ряду – $R = \frac{1}{3}$, круг збіжності допоміжного ряду – $|t| < \frac{1}{3}$, а круг збіжності початкового ряду – $|z| < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

6) *Знайти радіус збіжності степеневого ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{3n}} z^{2n-1}$.

У ряді коефіцієнти при парних ступенях z дорівнюють 0, тобто $a_k = \frac{(2n-1)!}{(2n-1)^{3(2n-1)}}$, якщо $k = 2n-1$, і $a_k = 0$, якщо $k = 2n$. Аналогічно попередньому прикладу не можна скористатися формулами (7.9), тому що відповідні границі не існують. Введемо нову змінну $t = z^2$. Тоді одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{3n}} z^{2n-1} = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{3n}} z^{2n} = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{3n}} t^n,$$

радіус збіжності цього ряду знайдемо за допомогою формули Даламбера

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{3(n+1)}}}{\frac{n!}{n^{3n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \cdot n^{3n}}{(n+1)^{3(n+1)} \cdot n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) \cdot n! \cdot n^{3n}}{(n+1)^{3n+3} \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3n}}{(n+1)^{3n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{3n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \cdot e^{3n \ln\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \cdot e^{3n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)} =$$

$$= [\ln(1+x) \sim x, x \to 0] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \cdot e^{-\frac{3n}{n+1}} = \{0 \cdot e^{-3}\} = 0.$$

Таким чином, радіус збіжності допоміжного ряду — $R = \left\{\frac{1}{0}\right\} = \infty$, коло збіжності допоміжного ряду — $|t| < \infty$, а коло збіжності початкового ряду — $|z| < \infty$.

Приклад 7.2.

1) *Розкласти функцію* $\cos^2 z$ *у ряд Тейлора в околі точки* $z_0 = 0$.

$$\cos^2 z = \frac{1}{2}(1+\cos 2z) = \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2z)^{2n}}{(2n)!}\right) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot 2^{2n-1} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Ряд для $\cos z$ збігається у всій комплексній площині, тоді й отриманий ряд для $\cos^2 z$ збігається у всій комплексній площині.

2) *Розкласти функцію* $\frac{z}{z^2-2z-3}$ *в ряд Тейлора в околі точки* 0.

Для розкладу в ряд раціональної функції її спочатку представляють у вигляді суми найпростіших дробів, а потім кожен дріб розкладають, використовуючи формулу (7.10) суми нескінченної спадної геометричної прогресії.

$$\frac{z}{z^2 - 2z - 3} = \frac{z}{(z+1)(z-3)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z+1} + \frac{3}{z-3}\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+z} - \frac{1}{1-z/3}\right) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n - \frac{1}{3^n}\right) z^n.$$

Отриманий ряд збігається лише при $|-z| < 1$ і $|z/3| < 1$, тобто при $|z| < 1$, бо була використана формула (7.10) суми нескінченної спадної геометричної прогресії.

3) *Розкласти функцію* $\frac{2}{(1-z)^3}$ *в ряд Тейлора в околі точки* $z_0 = 0$.

Розглянемо ряд

$$\tfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots,$$

збіжний в одиничному крузі. Диференціюючи цей ряд почленно, одержимо

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = 1 + 2z + 3z^2 + \ldots + (n+1)z^n + \ldots.$$

Отриманий ряд знову диференціюємо:

$$\frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^{n-2} = 2 + 3\cdot 2z + 4\cdot 3z^2 + \ldots + (n+1)nz^{n-1} + \ldots$$

Таким чином, $$\frac{2}{(1-z)^3} = \left(\frac{1}{1-z}\right)'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^{n-2}.$$

Даний ряд так само збігається в крузі $|z| < 1$.

4) *Розкласти функцію* $\frac{z^2}{(z+1)^2}$ *в ряд Тейлора в околі* $z_0 = 1$.

$$\frac{z^2}{(z+1)^2} = \left(\frac{(z-1)+1}{(z-1)+2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{(z-1)+1}{1+(z-1)/2}\right)^2 = \left[t = \frac{z-1}{2}\right] =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2t+1}{1+t}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(2 - \frac{1}{t+1}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(4 - \frac{4}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2}\right) =$$
$$= \left[\tfrac{1}{(t+1)^2} = -\left(\tfrac{1}{t+1}\right)'\right] = 1 - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t+1}\right)' = 1 - \sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n -$$
$$-\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n\right)' = 1 - \sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} n(-t)^{n-1} =$$
$$= 1 - \sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-t)^n = 1 - 1 + t - \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n t^n +$$
$$+\frac{1}{4} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)(-1)^n t^n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n-3)t^n =$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n-3)}{2^n}(z-1)^n.$$

Була використана формула суми нескінченної спадної геометричної прогресії, тому даний розклад вірний лише при $|t| = \frac{1}{2}|z-1| < 1$, тобто при $|z-1| < 2$.

Приклад 7.3. *Знайти три перших відмінних від нуля члена ряду Тейлора по ступенях* z *функції* $\frac{z}{\cos z}$, *а також круг збіжності отриманого ряду.*

Скористаємося методом невизначених коефіцієнтів. Функція $\frac{z}{\cos z}$ аналітична в околі точки $z_0 = 0$, отже її можна розкласти в ряд:
$$\frac{z}{\cos z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Взявши в цій рівності $z = 0$, знайдемо: $a_0 = 0$. Для визначення інших коефіцієнтів скористаємося співвідношенням
$$\frac{z}{\cos z}\cdot\cos z = z.$$

Ряд косинуса нам відомий. Тому

$$z = (a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots) \cdot (1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots).$$

У силу єдиності розкладу функції в степеневий ряд, прирівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях z, одержимо систему

$$\begin{cases} 0 &= a_0, \\ 1 &= a_1, \\ 0 &= a_2 - \frac{a_0}{2!}, \\ 0 &= a_3 - \frac{a_1}{2!}, \\ 0 &= a_4 - \frac{a_2}{2!} + \frac{a_0}{4!}, \\ 0 &= a_5 - \frac{a_3}{2!} + \frac{a_1}{4!}, \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 = 1, \\ a_2 = 0, \\ a_3 = \frac{a_1}{2!} = \frac{1}{2}, \\ a_4 = 0, \\ a_5 = \frac{a_3}{2!} - \frac{a_1}{4!} = \frac{5}{24}, \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

Отже, $\frac{z}{\cos z} = z + \frac{1}{2} z^3 + \frac{5}{24} z^5 + \ldots$

Найближчою до точки 0 особливою точкою функції $\frac{z}{\cos z}$ є $\frac{\pi}{2}$, тому цей ряд збігається в колі $|z| < \frac{\pi}{2}$.

7.2. Нулі функцій

Точка z_0 називається *нулем (коренем)* функції $f(z)$, якщо $f(z_0) = 0$.

Нуль z_0 функції $f(z)$ називається *нулем кратності* k, якщо:

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z), \qquad g(z_0) \neq 0.$$

Теорема. Аналітична функція $f(z)$ має нуль кратності k у точці z_0

$$\Leftrightarrow \qquad f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0, \qquad f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

Приклад 7.4. *Точка z_0 є коренем кратності k для функції $f(z)$ і нулем кратності l для функції $\varphi(z)$. Нулем якої кратності є точка z_0 для $f(z) + \varphi(z)$?*

Нехай $k < l$. Тоді:

$$f(z) + \varphi(z) = (z - z_0)^k f_1(z) + (z - z_0)^l \varphi_1(z) =$$

$$= (z - z_0)^k \left(f_1(z) + (z - z_0)^{l-k} \varphi_1(z) \right).$$

Кожна з функцій $f_1(z)$ і $\varphi_1(z)$ у точці z_0 має відмінне від нуля значення, але сума $f_1(z) + (z - z_0)^{l-k} \varphi_1(z)$ у точці z_0 може стати нулем.

Отже, якщо точка z_0 є нулем порядку k для функції $f(z)$ і нулем порядку l для функції $\varphi(z)$, то для функції $f(z)+\varphi(z)$ вона є нулем, принаймні, порядку $\min\{k,\ l\}$.

Приклад 7.5.

1) *Знайти порядок нуля* $z_0 = 0$ *функції* $f(z) = e^{\sin z} - e^{\operatorname{tg} z}$.

$$f(0) = e^0 - e^0 = 0;$$

$$f'(z) = e^{\sin z}\cos z - e^{\operatorname{tg} z}\frac{1}{\cos^2 z}, \quad f'(0) = 0;$$

$$f''(z) = e^{\sin z}(\cos^2 z - \sin z) - e^{\operatorname{tg} z}\left(\frac{1}{\cos^4 z} + \frac{2\sin z}{\cos^3 z}\right), \quad f''(0) = 0;$$

$$f'''(z) = e^{\sin z}(\cos^3 z - 3\cos z\sin z - \cos z) - e^{\operatorname{tg} z}\left(\frac{1}{\cos^6 z} + \frac{6\sin z}{\cos^5 z} + \right.$$
$$\left. + \frac{2\cos^4 z + 6\cos^2 z\sin^2 z}{\cos^6 z}\right), \quad f'''(0) = -3.$$

$f'''(0) \neq 0, \Longrightarrow z_0 = 0$ нуль 3-го порядку для $f(z)$.

2) *Знайти порядок нуля* $z_0 = 0$ *для функції* $\frac{z^8}{z - \sin z}$.

Використовуючи ряд Тейлора для $\sin z$ в околі точки $z_0 = 0$, отримаємо:

$$\frac{z^8}{z - \sin z} = \frac{z^8}{z - \left(z - \frac{z^3}{6} + \ldots + \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right)} =$$

$$= \frac{z^8}{\frac{z^3}{6} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots} = \frac{z^5}{\frac{1}{6} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1} z^{2n-2}}{(2n+1)!} + \ldots}.$$

Позначимо:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\frac{1}{6} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1} z^{2n-2}}{(2n+1)!} + \ldots}.$$

Тоді $f(z) = z^5\varphi(z)$, де $\varphi(z)$ – функція, аналітична в точці $z_0 = 0$, причому $\varphi(0) = 6 \neq 0$. Отже, точка $z_0 = 0$ є для даної функції нулем п’ятого порядку.

Приклад 7.6. *Знайти кратності всіх нулів функції* $\frac{z^2+4}{z^5}$ *(з урахуванням нескінченності).*

Функція $f(z) = \frac{z^2+4}{z^5}$ обертається на нуль, якщо $z^2+4=0$, тобто при $z_{1,2} = \pm 2i$, але вже перша її похідна в цих точках відмінна від нуля:

$$f'(\pm 2i) = -\left.\frac{3z^2+20}{z^6}\right|_{z=\pm 2i} = \frac{1}{8} \neq 0.$$

Отже, точки $z_{1,2} = \pm 2i$ є простими (тобто першої кратності) нулями.

Для визначення кратності нуля в точці $z_3 = \infty$ зробимо заміну

$$z = \frac{1}{t},$$

тоді

$$f(z) = f(1/t) =: \varphi(t) = t^5\left(\frac{1}{t^2}+4\right) = 4t^5 + t^3 = t^3(4t^2+1).$$

Функція $\varphi(t)$ має нуль третьої кратності при $t=0$. Таким чином, точка $z_3 = \infty$ теж є нулем третьої кратності.

7.3. Контрольні запитання

1. Формули Даламбера та Коші для радіуса збіжності степеневого ряду.

2. Ряди Тейлора для e^z, $\sin(z)$, $\cos(z)$, $\ln(1+z)$, $(1+z)^\alpha$.

3. Означення нуля аналітичної функції кратності k.

7.4. Задачі для самостійного розв'язання

Аудиторні вправи.	**Домашні вправи.**
6.1. Знайти радіус збіжності степеневого ряду	
1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$; **2)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$; **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n\ z^{2n}$.	**4)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\ z^n}{2^n}$; **5)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\ z^n}{n^n}$; **6)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{2n}$.
6.2. Розкласти функцію в ряд Тейлора в околі точки z_0.	
1) $\operatorname{ch} z,\ z_0 = 0$. **2)** $\frac{z}{z+2}$; $z_0 = 1$. **3)** $\sin(2z - z^2)$; $z_0 = 1$.	**4)** $\operatorname{sh} z,\ z_0 = 0$. **5)** $\frac{z}{z^2-2z+5}$; $z_0 = 1$. **6)** $\ln z$; $z_0 = 1$.
6.3. Знайти три перших відмінних від нуля члена ряда Тейлора по степенях z, а також круг збіжності отриманого ряду для	
1) $\frac{z}{e^z}$.	**2)** $\operatorname{tg} z$.
6.4. Точка z_0 є коренем кратності k для функції $f(z)$ і нулем кратності l для функції $\varphi(z)$. Нулем якої кратності є точка z_0 для	
1) $f(z)\varphi(z)$?	**2)** $\dfrac{f(z)}{\varphi(z)}$?
6.5. Знайти кратність нуля $z_0 = 0$ функцій:	
1) $z^2(e^{z^2} - 1)$.	**2)** $6 \sin z^3 + z^3(z^6 - 6)$.
6.6. Знайти кратності усіх нулів функцій:	
1) $\frac{z^2+9}{z^4}$; **2)** $(1 - e^z)(z^2 - 4)^3$; **3)** $1 - \cos z$.	**4)** $z^2 + 9$; **5)** $z \sin z$; **6)** $\cos z^3$.

8. Ряди Лорана та особливі точки функцій

8.1. Ряди Лорана

Рядом Лорана аналітичної в кільці $r < |z - z_0| < R$ функції $f(z)$ називається узагальнений степеневий ряд

$$f(z) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k}_{\text{правильна частина}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} \frac{1}{(z - z_0)^k}}_{\text{головна частина}},$$

де $c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$, $r < \rho < R$.

Теорема. (Лоран)

Аналітична в кільці $r < |z - z_0| < R$ функція $f(z)$ розкладається в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} \frac{1}{(z - z_0)^k}.$$

Приклад 8.1. *Розвинути функцію*

$$f(z) = \frac{1}{z - 3}$$

у ряд Лорана в околі точок 0 *і* ∞.

Функція $f(z) = \frac{1}{z-3}$ аналітична у крузі $|z| < 3$, тому вона розкладається в ньому в ряд Тейлора за степенями z, тобто $z_0 = 0$. Використовуючи формулу для геометричної прогресії $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, $|q| < 1$, знаходимо:

$$\frac{1}{z - 3} = -\frac{1}{3\left(1 - \frac{z}{3}\right)} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} = -\frac{1}{3} - \frac{z}{9} - \frac{z^2}{27} \cdots$$

Ряд збігається при $\left|\frac{z}{3}\right| < 1$, тобто при $|z| < 3$.

Функція $f(z) = \frac{1}{z-3}$ аналітична в кільці $3 < |z| < \infty$, тому вона розкладається в цьому кільці в ряд Лорана за степенями z, тобто $z_0 = \infty$. Використовуючи формулу для геометричної прогресії, знаходимо:

$$\frac{1}{z - 3} = \frac{1}{z\left(1 - \frac{3}{z}\right)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^{n+1}} = \frac{1}{z} + \frac{3}{z^2} \cdots$$

Ряд збігається при $\left|\frac{3}{z}\right| < 1$, тобто при $|z| > 3$.

Приклад 8.2. *Розвинути функцію*

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)^2}$$

за степенями z в крузі $|z| < 3$.

У прикладі 7.1 було знайдено ряд для функції $\frac{1}{z-3}$ у крузі $|z| < 3$:

$$\frac{1}{z-3} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}.$$

Продиференціюємо обидві частини цієї рівності:

$$-\frac{1}{(z-3)^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{3^{n+1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(z-3)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n+1}} z^{n-1}.$$

Отриманий ряд буде рядом Тейлора і рядом Тейлора даної функції.

Приклад 8.3. *Розвинути в ряд Лорана функцію*

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)(z+2)}.$$

Функція $f(z)$ аналітична в трьох наступних областях $D_1 = \{|z| < 1\}$, $D_2 = \{1 < |z| < 2\}$, $D_3 = \{|z| > 2\}$. Знайдемо ряд Лорана функції $f(z)$ в цих областях.

Представимо функцію $f(z)$ у вигляді суми простих дробів:

$$f(z) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{z+2}\right)$$

Якщо $\underline{|z| < 1,}$ то

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

а якщо $\underline{|z| > 1,}$ то

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}.$$

Аналогічно, в крузі $\underline{|z| < 2}$ маємо розклад

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2(1+\frac{z}{2})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}},$$

а якщо $\underline{|z| > 2,}$ то

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z(1+\frac{2}{z})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{z^n}.$$

а) В області $D_1 = \{|z| < 1\}$ функція $f(z)$ розкладається в ряд Лорана:

$$f(z) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right) z^n.$$

Цей ряд є рядом Тейлора.

б) В області $D_2 = \{1 < |z| < 2\}$ ряд Лорана функції $f(z)$ має наступний вигляд:

$$f(z) = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}.$$

Цей ряд містить як додатні, так і від'ємні степені z.

в) В області $D_3 = \{|z| > 2\}$ функція $f(z)$ має ряд Лорана, що містить тільки від'ємні степені z :

$$f(z) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^{n-1}2^{n-1} - 1\right) \frac{1}{z^n}.$$

Приклад 8.4. *Знайти ряд Лорана функції*

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z+2)}$$

в околі точок $z = 0$ *і* $z = -2$.

Розкладемо спочатку функцію в суму простих дробів:

$$\frac{1}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{z+2} - \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{z-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(z-1)^2}.$$

В околі точки $z = 0$, а саме в крузі $|z| < 1$, функція $\frac{1}{(z-1)^2(z+2)}$ і кожен доданок суми аналітичний. Розкладемо ці прості дроби у ряди Тейлора:

$$\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{z+2} = \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{18}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n};$$

$$-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{z-1} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1-z} = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Ряд функції $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(z-1)^2}$ знайдемо почленним диференціюванням ряду функції $-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{z-1}$:

$$\left(-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{z-1}\right)' = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1};$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \Big[n-1=m\Big] = \frac{1}{3}\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)z^m.$$

Таким чином, у крузі $|z|<1$ маємо:

$$\frac{1}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{1}{18}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n} + \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{1}{3}\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)z^m =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{18\cdot 2^n + \frac{1}{9} + \frac{1}{3}(n+1)}\right) z^n = \frac{17}{36} + \frac{27}{36}z + \ldots$$

В околі точки $z=1$ функція $\frac{1}{(z-1)^2(z+2)}$ неаналітична, але вона є аналітичною в кільці $0<|z-1|<3$. Розкладемо її в ряд Лорана за степенями $z-1$. Для цього потрібно розкласти тільки доданок $\frac{1}{z+2}$. Ця функція аналітична всередині круга $|z-1|<3$, тому вона розкладається в ряд за додатнім степенями $z-1$:

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z-1+3} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{3^n}, \quad |z-1|<3,$$

отже,

$$\frac{1}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{1}{3}\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{9}\,\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-1)^n.$$

Це і є ряд Лорана функції $\frac{1}{z+2}$ в кільці $0<|z-1|<3$.

Приклад 8.5. *Розвинути в ряд за степенями z функцію*

$$z^2 e^{\frac{1}{z}}.$$

Функція $z^2e^{\frac{1}{z}}$ неаналітична в точці $z=0$, тому її розклад в ряд за степенями z буде містити як додатні так і від'ємні степені z, тобто вона розкладається в ряд Лорана. Використовуючи ряд Тейлора функції e^w, $w=\frac{1}{z}$, одержимо:

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots$$

Домножимо ряд для $e^{\frac{1}{z}}$ на z^2 й одержимо

$$z^2 e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{z^2}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^{n-2}} = z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!z} + \cdots$$

Цей ряд збігається в кільці $0 < |z| < \infty$.

Приклад 8.6. *Розвинути* $(1+z^3)\sin\frac{1}{z^2}$ *в ряд за степенями* z.

Функція $(1+z^3)\sin\frac{1}{z^2}$ неаналітична в точці $z = 0$, тому її ряд за степенями z буде містити як додатні так і від'ємні степені z, тобто вона розкладається в ряд Лорана. Використовуючи ряд Тейлора функції $\sin w$, $w = \frac{1}{z^2}$, одержимо:

$$\sin\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{z^{2(2n+1)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{z^{4n+2}}.$$

Помножимо ряд на $(1+z^3)$ й розкриємо дужки:

$$(1+z^3)\sin\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1+z^3}{z^{4n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{z^{4n+2}} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{z^{4n-1}} = z + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{6}\frac{1}{z^3} - \frac{1}{6}\frac{1}{z^6} + \frac{1}{120}\frac{1}{z^7} - \cdots$$

Цей ряд збігається в кільці $0 < |z| < \infty$.

8.2. Класифікація ізольованих особливостей

Нехай функція $f(z)$ аналітична в кільці $0 < |z-a| < \rho$, але не аналітична в точці a $(a \neq \infty)$. Тоді точка a називається *ізольованою особливою точкою однозначного характеру для функції* $f(z)$.

З огляду на поведінку функції $f(z)$ поблизу точки a розрізняють три типи особливих точок.

Ізольована особлива точка a однозначного характеру функції $f(z)$ називається

- *усувною особливістю,* якщо коефіцієнти при від'ємних степенях ряду Лорана функції $f(z)$ у кільці $0 < |z-a| < \rho$ дорівнюють нулю, тобто в її ряді Лорана нульова головна частина:

$$0 = c_{-1} = c_{-2} = \ldots = c_{-n} = \ldots$$

- *полюсом порядку m,* якщо коефіцієнти при від'ємних степенях ряду Лорана функції $f(z)$ у кільці $0 < |z-a| < \rho$, починаючи з $-(m+1)$, дорівнюють нулю, тобто в її ряді Лорана головна частина містить не більше ніж m доданків:

$$c_{-m} \neq 0,\ 0 = c_{-(m+1)} = c_{-(m+2)} = \dots$$

- *істотною особливістю,* якщо серед коефіцієнтів при від'ємних степенях ряду Лорана функції $f(z)$ у кільці $0 < |z-a| < \rho$, знайдеться нескінченно багато відмінних від нуля, тобто в її ряді Лорана головна частина містить нескінченно багато доданків.

Нескінченно віддалена точка ∞ називається *ізольованою особливою точкою однозначного характеру для функції* $f(z)$, якщо функція $f(z)$ аналітична в області $\rho < |z| < +\infty$.

Нескінченно віддалена точка $a = \infty$ називається *усувною особливістю, полюсом чи істотною особливістю* функції $f(z)$ у залежності від того, чи є $\zeta = 0$ усувною особливістю, полюсом чи істотною особливістю функції $g(\zeta) = f(\frac{1}{\zeta})$.

$$g(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{1}{\zeta^k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{-k}\zeta^k.$$

Поведінку функції $f(z)$ в околі $a = \infty$ визначає правильна частина, а не головна, як для $a \in \mathbb{C}$.

Теорема.
Нехай $a \in \overline{\mathbb{C}}$:

- a є усувною особливістю функції $f(z) \Longleftrightarrow$ функція $f(z)$ обмежена в околі числа a.

- a є полюсом порядку m функції $f(z) \Longleftrightarrow$ число a є нулем кратності m функції $\frac{1}{f(z)}$.

- a є усувною особливістю $f(z) \Longleftrightarrow \exists \lim\limits_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$.

- a є полюсом функції $f(z) \Longleftrightarrow \exists \lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$.

- a є істотною особливістю $f(z) \Longleftrightarrow \nexists \lim\limits_{z\to a} f(z)$.

Приклад 8.7. *Знайти особливі точки функції* $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, *з'ясувати їх характер.*

Функція $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ аналітична у всій площині $\mathbb{C}$ крім точки $z = 0$, у якій знаменник обертається на нуль. Використовуючи ряд Тейлора для $\sin z$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{z - \frac{z^3}{6} + \ldots + \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots}{z} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(1 - \frac{z^2}{6} + \ldots\right) = 1 \in \mathbb{C},$$

бачимо, що точка $z = 0$ є усувною особливістю.

Приклад 8.8. *Знайти особливі точки функції* $f(z) = \frac{z^2}{z+1}$, *з'ясувати їх характер.*

Точка $z = -1$ є полюсом функції $f(z) = \frac{z^2}{z+1}$, ця функція аналітична при $z \neq -1$ і $\lim\limits_{z\to -1}\frac{z^2}{z+1} = \infty$.

Причому для функції $\frac{1}{f(z)} = \frac{z+1}{z^2}$ точка $z = -1$ — нуль першої кратності, виходить, для функції $f(z)$ $z = -1$ — полюс першого порядку.

Розглянемо точку $z = \infty$. Виконаємо заміну $z = \frac{1}{\zeta}$ і будемо досліджувати поведінку при $\zeta = 0$:

$$\lim_{z\to\infty}\frac{z^2}{z+1} = \left[z = \frac{1}{\zeta}\right] = \lim_{\zeta\to 0}\frac{\frac{1}{\zeta^2}}{\frac{1}{\zeta}+1} = \lim_{\zeta\to 0}\frac{1}{\zeta(\zeta+1)} = \infty$$

$\Longrightarrow$ $z = \infty$ є полюсом для функції $f(z)$.

Причому для функції $\frac{1}{f(z)} = \zeta(\zeta+1)$ точка $\zeta = 0$ — нуль першої кратності, отже, для функції $f(z)$ $z = \infty$ — полюс першого порядку.

Приклад 8.9. *Знайти особливі точки функції* $f(z) = e^z$, *з'ясувати їх характер.*

Точка $z = \infty$ є істотною особливістю для функції e^z, тому що ця функція аналітична у всій комплексній площині і не має границі при $z \to \infty$.

Дійсно, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Приклад 8.10. *Знайти особливі точки функцій* $f_1(z) = \sin z, f_2(z) = \cos z$, *з'ясувати їх характер.*

Точка $z = \infty$ є істотною особливістю для функцій $\sin z, \cos z$, тому що ці функції аналітичні у всій комплексній площині і в них не існує границі при $z \to \infty$.

Приклад 8.11. *Знайти особливі точки функції $f(z) = e^{1/z^2}$, з'ясувати їх характер.*

Для функції $f(z) = e^{1/z^2}$ точка $z = 0$ є істотною особливістю, тому що функція $f(z)$ аналітична при $z \neq 0$ і не має границі при $z \to 0$. Справді, якщо $z = x$, то

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} e^{\frac{1}{x^2}} = \infty.$$

а якщо $z = iy$, то

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} e^{\frac{1}{-y^2}} = 0.$$

Розглянемо точку $z = \infty$. Виконаємо заміну $z = \frac{1}{\zeta}$ та вивчимо її поведінку при $\zeta = 0$.

$$\lim_{z\to\infty} e^{1/z^2} = \left[z = \frac{1}{\zeta}\right] = \lim_{\zeta\to 0} e^{1/\frac{1}{\zeta^2}} = \lim_{\zeta\to 0} e^{\zeta^2} = 1 \in \mathbb{C}.$$

$\Longrightarrow$ $z = \infty$ є усувною особливістю функції $f(z)$.

Приклад 8.12. *Знайти всі ізольовані особливі точки функції*

$$f(z) = \frac{\sin(1/z)}{(z^2+9)^2}$$

і визначити їх тип.

Скінченними особливими точками є $z_1 = 0$, а також точки, в яких $z^2 + 9 = 0$, тобто $z_2 = 3i$ і $z_3 = -3i$. Тому особлива точка $z_4 = \infty$ теж є ізольованою, оскільки знайдеться окіл $|z| > R$, що не містить інших особливих точок.

Розглянемо точку $z_1 = 0$. Нехай точки z'_n такі, що $\frac{1}{z'_n} = \pi n$, тобто $z'_n = \frac{1}{\pi n}, (n \in \mathbb{N})$. Тоді $f(z'_n) = 0$. Через z''_n позначимо точки для яких $\frac{1}{z''_n} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, тобто $z''_n = \frac{2}{\pi + 4\pi n}$. У цих точках $\sin\frac{1}{z''_n} = 1\,(n \in \mathbb{N})$. Легко бачити, що $z'_n \to 0$ і $z''_n \to 0$ при $n \to \infty$. В той же час границі

$$\lim_{n\to\infty} f(z'_n) = 0 \quad \text{і} \quad \lim_{n\to\infty} f(z''_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{((z''_n)^2+9)^2} = \frac{1}{81}$$

різні. Отже, функція $f(z)$ не має границі при $z \to 0$. Тому точка $z_1 = 0$ є істотно особливою.

Для розгляду точок $z_2 = 3i$ та $z_3 = -3i$ розкладемо знаменник на множники. Оскільки

$$z^2 + 9 = (z - 3i)(z + 3i),$$

то

$$f(z) = \frac{\sin(1/z)}{(z-3i)^2(z+3i)^2} \quad \text{де} \quad h(z) = \frac{\sin(1/z)}{(z+3i)^2}.$$

Оскільки функція $h(z)$ аналітична в околі точки $z_2 = 3i$ і

$$h(z_2) = \frac{\sin(1/3i)}{(6i)^2} \neq 0,$$

то точка $z_2 = 3i$ є полюсом другого порядку. Аналогічно доводиться, що $z_3 = -3i$ – теж полюс другого порядку.

Залишилося розглянути точку $z_4 = \infty$. Це можна зробити двома способами: або перейти до змінної $w = 1/z$ та досліджувати особливу точку $w_4 = 0$ функції $g(w) = f(1/w)$ або безпосередньо обчислити границю $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ (чи довести, що ця границя не існує). У даному випадку вказана границя легко обчислюється, тому другий спосіб — простіший. Дійсно, $1/z \to 0$ при $z \to \infty$. Тому й $\sin(1/z) \to 0$ при $z \to \infty$. Очевидно, що $(z^2+9)^2 \to \infty$ при $z \to \infty$. Отже,

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{\sin 1/z}{(z^2+9)^2} = 0.$$

Оскільки функція $f(z)$ має скінченну границю при $z \to \infty$, то $z_4 = \infty$ — усувна особлива точка (тут неістотно, що границя дорівнює нулю; важливо, що вона є скінченним числом). Якщо покласти $f(\infty) = 0$, тоді $f(z)$ стане аналітичною в точці $z_4 = \infty$.

8.3. Контрольні запитання

1) Наведіть означення ряду Лорана.
2) Сформулюйте теорему Лорана.
3) Наведіть означення ізольованої особливої точки.
4) Наведіть означення усувної особливості.
5) Наведіть означення полюса порядка m.
6) Наведіть означення істотної особливості.

8.4. Задачі для самостійного розв'язання.

Аудиторні вправи.	Домашні вправи.
7.1. Розвинути функцію $f(z)$ у ряд Лорана в околі точок 0 і ∞:	
1) $f(z) = \frac{1}{z-2}$.	**2)** $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$.
7.2. Розвинути функцію $f(z)$ у ряд Лорана в околах точок z_0 і ∞ :	
1) $f(z) = \frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, $z_0 = 2$.	**2)** $f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$, $z_0 = a$.
7.3.Розвинути функцію $f(z)$ у ряд Лорана в заданому кільці:	
1) $f(z) = \frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, $1 < \|z\| < 2$.	**2)** $f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$, $\|a\| < \|z\| < \|b\|$, $(0 < \|a\| < \|b\|)$.
7.4. З'ясувати, чи розкладається $f(z)$ в ряд Лорана в околі z_0:	
1) $f(z) = \cos\dfrac{1}{z}$, $z_0 = 0$; **2)** $f(z) = \cos\dfrac{1}{z}$, $z_0 = \infty$; **3)** $f(z) = \operatorname{ctg} z$, $z_0 = \infty$; **4)** $f(z) = \ln z$, $z_0 = 0$.	**5)** $f(z) = \dfrac{z}{\sin z - 3}$, $z_0 = \infty$; **6)** $f(z) = \operatorname{th}\dfrac{1}{z}$, $z_0 = 0$; **7)** $f(z) = \dfrac{z^2}{\sin 1/z}$, $z_0 = 0$; **8)** $f(z) = 1/\sin\frac{1}{z-1}$, $z_0 = 1$.
7.5.Знайти особливі точки функцій, з'ясувати їх характер (враховуючи нескінченно віддалену точку):	
1) $\dfrac{1}{z-z^3}$; **2)** $\dfrac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z}$; **3)** $ze^{\frac{1}{z}}$; **4)** $e^{z-\frac{1}{z}}$; **5)** $\frac{\cos z}{z^2}$.	**6)** $\frac{z^5}{(1-z)^2}$; **7)** $\frac{1-e^z}{2+e^z}$; **8)** $\frac{1}{\sin z}$; **9)** $\operatorname{ctg} z - \frac{2}{z}$; **10)** $e^{\frac{z}{1-z}}$.

9. Обчислення інтегралів за допомогою лишків

9.1. Лишки

Лишком аналітичної в проколотому околі $\{0 < |z - z_0| < r\}$ точки z_0 функції $f(z)$ називається число

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-z_0|=\rho} f(\zeta)d\zeta, \ 0 < \rho < r.$$

За теоремою Лорана функція $f(z)$ розкладається в ряд Лорана в кільці $\{0 < |z - z_0| < r\}$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} \frac{1}{(z - z_0)^k},$$

при цьому

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^{-1+1}} = \operatorname*{res}_{z_0} f(z).$$

Тобто обчислення лишків — це знаходження коефіцієнта c_{-1} при $(z-z_0)^{-1}$ у розкладі в ряд Лорана функції $f(z)$.

Теорема.

- z_0– усувна особливість $f(z) \Longrightarrow \operatorname*{res}_{z_0} f(z) = 0.$
- z_0– полюс порядку m функції $f(z) \Longrightarrow$
$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \Big((z - z_0)^m f(z) \Big)^{(m-1)} \qquad (9.11)$$
- z_0– полюс порядку 1 функції $f(z) \Longrightarrow \operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$
- z_0– корінь порядку 1 функції $\psi(z)$ і не є коренем $\varphi(z) \Longrightarrow$
$$\operatorname*{res}_{z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \qquad (9.12)$$

Теорема.
$f(z)$ аналітична в $\mathbb{C}$, крім скінченного числа точок $\{z_1, \dots z_n\} \subset \mathbb{C}$ $\Longrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} f(z) + \operatorname*{res}_{\infty} f(z) = 0.$$

Якщо у функції $f(z)$ у точці		
$a \in \mathbb{C}$	усувна особливість	$\operatorname*{res}_a f(z) = 0$
	полюс першого порядку	$\operatorname*{res}_a f(z) = \lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)$; $\operatorname*{res}_a \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \dfrac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$
	полюс m-го порядку	$\operatorname*{res}_a f(z) = = \frac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{z\to a}\big((z-a)^m f(z)\big)^{(m-1)}$
	істотна особливість	$\operatorname*{res}_a f(z) = c_{-1}$
$a = \infty$	ізольована особливість	$\operatorname*{res}_\infty f(z) = -c_{-1}$
	усувна особливість	$\operatorname*{res}_\infty f(z) = \lim\limits_{z\to\infty}\big(z(f(\infty)-f(z))\big)$

Приклад 9.1.

1) *Знайти лишки функції* $\frac{1}{z^3(z^2+4)^2}$ *відносно всіх ізольованих особливостей.*

Особливі точки функції $f(z) = \frac{1}{z^3(z^2+4)^2}$:
$z_1 = 0$ — полюс третього порядку, $z_{2,3} = \pm 2i$ – полюси другого порядку. Застосовуючи формулу (9.11), знаходимо:

$$\operatorname*{res}_0 f(z) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(z^3\frac{1}{z^3(z^2+4)^2}\right)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{(z^2+4)^2}\right)'' =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(4\frac{5z^2-4}{(z^2+4)^4}\right) = -\frac{1}{32}.$$

$$\operatorname*{res}_{2i} f(z) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 2i}\left((z-2i)^2\frac{1}{z^3(z-2i)^2(z+2i)^2}\right)' = \lim_{z\to 2i}\left(\frac{1}{z^3(z+2i)^2}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to 2i}\left(-\frac{3}{z^4(z+2i)^2} - \frac{2}{z^3(z+2i)^3}\right) = \frac{1}{64}.$$

$$\operatorname*{res}_{-2i} f(z) = \lim_{z\to -2i}\left((z+2i)^2\frac{1}{z^3(z-2i)^2(z+2i)^2}\right)' = \lim_{z\to -2i}\left(\frac{1}{z^3(z-2i)^2}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to 2i}\left(-\frac{-3}{z^4(z-2i)^2} - \frac{2}{z^3(z-2i)^3}\right) = \frac{1}{64}.$$

$$\operatorname*{res}_\infty f(z) = -\operatorname*{res}_0 f(z) - \operatorname*{res}_{2i} f(z) - \operatorname*{res}_{-2i} f(z) = \frac{1}{32} - \frac{1}{64} - \frac{1}{64} = 0.$$

2) *Знайти лишки функції* $\frac{z}{\sin z}$ *відносно всіх ізольованих особливостей.*

Функція $f(z) = \frac{z}{\sin z}$ має в точці $z_0 = 0$ усувну особливість, а в точках $z_k = \pi k, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0,$ — полюси першого порядку. Лишок в усувній особливій точці дорівнює нулю, таким чином $\operatorname*{res}_0 \frac{z}{\sin z} = 0$, а лишки в точках $z_k = \pi k$ знайдемо за формулою (9.12), де $\varphi(z) = z,\ \psi(z) = \sin z$.

$$\operatorname*{res}_0 \frac{z}{\sin z} = \frac{\pi k}{(\sin z)'\big|_{\pi k}} = \frac{\pi k}{\cos \pi k} = (-1)^k \pi k,\ k \in \mathbb{Z}, k \neq 0.$$

Нескінченність не є ізольованою особливістю $f(z)$, тому що вона гранична для полюсів z_k.

3) *Знайти лишки функції* $f(z) = z^2 e^{1/z}$ *у нулі.*

Функція $f(z) = z^2 e^{1/z}$ має в точці 0 істотну особливість, тому її лишки можна знайти тільки з ряду Лорана. Він має вигляд

$$f(z) = z^2 e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^{n-2}} = z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!z} + \ldots,$$

тому $\operatorname*{res}_0 \ z^2 e^{1/z} = c_{-1} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$

9.2. Обчислення інтегралів за допомогою лишків

Теорема. (Коші про лишки.)
$f(z)$ аналітична в області D і неперервна на її межі ∂D, крім скінченного числа точок $\{z_1, \ldots z_n\}$ усередині D
$\Longrightarrow$

$$\oint_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} f(z). \tag{9.13}$$

Приклад 9.2.

1) *Обчислити інтеграл* $\oint\limits_{|z+2i|=3} \frac{dz}{z^3(z^2+4)^2}$.

Функція $f(z) = \frac{1}{z^3(z^2+4)^2}$ має три полюси: $z_1 = 0$– полюс третього порядку, $z_{2,3} = \pm 2i$ – полюси другого порядку. Точки $z_1 = 0, z_3 = -2i$ лежать усередині контура інтегрування, тому за теоремою Коші про лишки:

$$\oint\limits_{|z+2i|=3} \frac{dz}{z^3(z^2+4)^2} = 2\pi i \left(\operatorname*{res}_0 \ f(z) + \operatorname*{res}_{-2i} f(z) \right) =$$

$$= 2\pi i \left(-\frac{1}{32} + \frac{1}{64}\right) = \frac{\pi i}{32}.$$

2) *Обчислити інтеграл* $\oint\limits_{|z|=1} z^2 e^{1/z} dz.$

Функція $f(z) = z^2 e^{1/z}$ має в точці 0 істотну особливість з лишком, рівним $\frac{1}{6}$. Ця точка лежить усередині контура інтегрування і в ньому немає інших особливостей.

$$\oint\limits_{|z|=1} z^2 e^{1/z} dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{0} \quad z^2 e^{1/z} = \frac{2\pi i}{6} = \frac{\pi i}{3}.$$

9.3. Контрольні запитання

1) Формула для знаходження лишка в полюсі порядку m функції $f(z)$. (Див. формулу (9.11)).

2) Теорема Коші про лишки.

9.4. Задачі для самостійного розв'язання

<table>
<tr><th>Аудиторні вправи.</th><th>Домашні вправи.</th></tr>
<tr><td colspan="2">8.1. Знайти лишки функцій відносно всіх ізольованих особливостей.</td></tr>
<tr><td>1) $\dfrac{1}{z^3 - z^5}$;
2) $\dfrac{1}{z\left(1 - z^2\right)}$;
3) $\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$.</td><td>4) $\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$;
5) $\dfrac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$;
6) $\dfrac{e^z}{z^2(z^2+9)}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">8.2. Знайти лишок функції в точці z_0:</td></tr>
<tr><td>1) $\dfrac{\sqrt{z}}{1-z}$, $z_0 = 1$.</td><td>2) $\dfrac{1}{\sqrt{2-z}+1}$, $z_0 = 1$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">8.3. Обчислити інтеграли:</td></tr>
<tr><td>1) $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{dz}{z^4+1}$ $\Gamma : x^2 + y^2 = 2x$;
2) $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$ $\Gamma : |z| = 2$;
3) $\int\limits_{\Gamma} \sin \frac{1}{z}\, dz$ $\Gamma : |z| = r$.</td><td>4) $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{z dz}{(z-1)(z-2)^2}$
$\Gamma : |z-2| = \frac{1}{2}$.
5) $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{z^3 dz}{2z^4+1}$ $\Gamma : |z| = 1$;
6) $\int\limits_{\Gamma} \sin^2 \frac{1}{z}\, dz$ $\Gamma : |z| = r$.</td></tr>
</table>

10. Обчислення визначених інтегралів

10.1. Інтеграли від тригонометричних функцій

Обчислення інтегралів вигляду

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos mx, \sin nx)dx,$$

де $m, n \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, R є раціональною функцією двох аргументів $\cos mx$ та $\sin nx$, обмеженою всередині проміжку інтегрування.

Позначимо $e^{ix} = z \quad \Rightarrow \quad ie^{ix}dx = dz$, тоді $dx = \frac{dz}{iz}$ і

$$\cos mx = \frac{e^{imx} + e^{-imx}}{2} = \frac{z^m + z^{-m}}{2} = \frac{z^{2m} + 1}{2z^m},$$

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = \frac{z^n - z^{-n}}{2i} = \frac{z^{2n} - 1}{2iz^n}.$$

У цьому випадку $|z| = 1$, при $0 \le x < 2\pi$.

Інтеграл приймає вигляд:

$$I = \int\limits_0^{2\pi} R(\cos mx, \sin nx)dx = \frac{1}{i}\int\limits_{|z|=1} R\left(\frac{z^{2m}+1}{2z^m}, \frac{z^{2n}-1}{2iz^n}\right)\frac{dz}{z} = \int\limits_{|z|=1} F(z)dz.$$

Ясно, що $F-$ раціональна функція, особливими точками якої є полюси, які позначимо через b_k. На колі $\{z \ : \ |z| = 1\}$ особливих точок не має. За теоремою Коші про лишки (9.13) інтеграл дорівнює добутку $2\pi i$ на суму лишків $F(z)$ відносно полюсів, що потрапили всередину кола інтегрування, тобто

$$I = 2\pi i \sum_{|b_k|<1} \operatorname*{res}_{b_k} F(z).$$

Приклад 10.1. *Обчислити інтеграл* $\quad I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{13-12\sin x}$.

Спочатку зробимо заміну $\varphi = \pi + x$, $d\varphi = dx, x = \varphi - \pi$. За формулами зведення $\sin x = \sin(\varphi - \pi) = -\sin(\pi - \varphi) = -\sin\varphi$. Тоді $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{13+12\sin\varphi}$. Застосовуючи підстановку $e^{i\varphi} = z$, одержимо після простих перетворень:

$$I = \frac{1}{i} \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z\left(13 + 12 \cdot \frac{z^2-1}{2iz}\right)} = \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{6z^2 + 13iz - 6}.$$

З огляду на те, що нулі знаменника $z_1 = -\frac{3}{2}i$, $z_2 = -\frac{2}{3}i$ є полюсами першого порядку підінтегральної функції, та на те, що всередину контура $|z| = 1$ потрапив лише $z_2 = -\frac{2}{3}i$, за теоремою Коші про лишки (9.13), одержимо:

$$I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z_2} \frac{1}{6z^2 + 13iz - 6} = 2\pi i \lim_{z \to z_2} \left(\frac{z - z_2}{6(z - z_1)(z - z_2)} \right) =$$

$$= \frac{2\pi i}{6(\frac{3}{2}i - \frac{2}{3}i)} = \frac{2\pi}{5}.$$

Приклад 10.2. *Обчислити інтеграл* $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b\cos x)^2}$, $(a > b > 0)$.

Застосовуючи підстановку $e^{ix} = z$, одержимо після простих перетворень

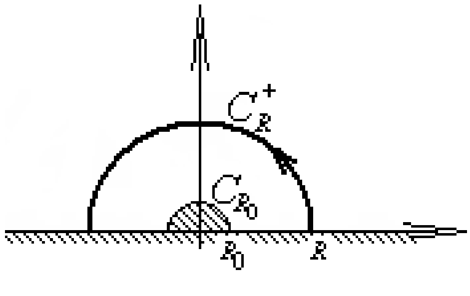
$$I = \frac{4}{i} \int\limits_C \frac{zdz}{(bz^2 + 2az + b)^2} = \frac{4}{i} \cdot 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} F(z).$$

Всередині одиничного кола за умови $a > b > 0$ знаходиться тільки один полюс (другого порядку) $z_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$. Лишок функції $F(z) = \frac{z}{(bz^2+2az+b)^2}$ — відносно цього полюса

$$\operatorname*{res}_{z_1} F(z) = \lim_{z \to z_1} \left(\frac{z(z - z_1)^2}{b^2(z - z_1)^2(z - z_2)^2} \right)' = \frac{a}{4}(a^2 - b^2)^{-3/2}.$$

Отже, $I = \frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}$.

10.2. Інтеграли від раціональних функцій



Теорема.

1) $f(z)$ – аналітична у верхній півплощині зовні півкола $C_{R_0}^+$,

2) $\lim\limits_{z \to \infty} zf(z) = 0$,

$\Longrightarrow$ $$\lim_{R \to \infty} \int\limits_{C_R^+} f(z)dz = 0.$$

Теорема.

1) $f(z)$ – аналітична у верхній півплощині і на дійсній осі, крім скінченного числа точок $\{z_k\}_{k=1}^n$ у верхній півплощині;

2) $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = 0$;

$\Longrightarrow$
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} f(z).$$

Теорема.

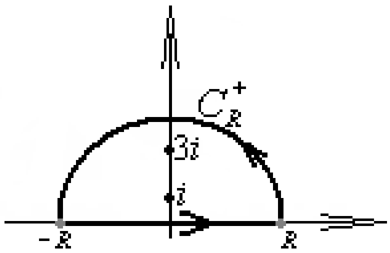
1) $f(x)$– раціональна функція, $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, де $P_m(x)$ і $Q_n(x)$– поліноми відповідно степенів m і n.

2) $f(x)$ неперервна на всій дійсній осі ($Q_n(x) \neq 0$) та $n \geq m+2$, тобто степінь знаменника, принаймні, на дві одиниці більше степеня чисельника.

$\Longrightarrow$
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname*{res}_{z_k} f(z), \tag{10.14}$$

тут додавання йде по всім полюсам $f(z)$, розташованим у верхній півплощині.

Приклад 10.3. *Обчислити інтеграл* $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2-x+2)dx}{x^4+10x^2+9}$.



Введемо функцію $f(z) = \frac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9}$, яка на дійсній осі, тобто при $z = x$, збігається з $f(x)$. Функція $f(z)$ має у верхній півплощині полюси першого порядку в точках $z_1 = i$ і $z_2 = 3i$.

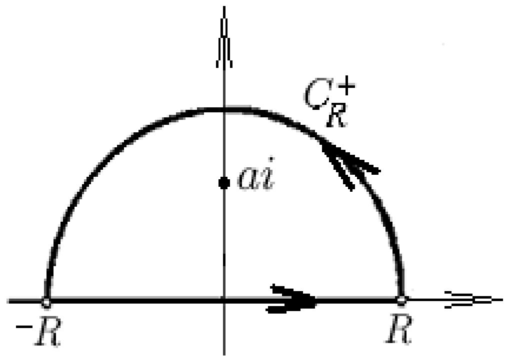
Лишок $f(z)$ відносно полюса $z_1 = i$ дорівнює:
$$\operatorname*{res}_{i} \frac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9} = \lim_{z\to i}\left(\frac{(z-i)(z^2-z+2)}{(z-i)(z+i)(z-3i)(z+3i)}\right) = \frac{1-i}{16i}.$$

Лишок $f(z)$ відносно полюса $z_2 = 3i$ дорівнює
$$\operatorname*{res}_{3i} \frac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9} = \lim_{z\to 3i}\left(\frac{(z-3i)(z^2-z+2)}{(z-i)(z+i)(z-3i)(z+3i)}\right) = \frac{-7-3i}{-48i}.$$

Тоді за формулою (9.13) одержимо:

$$I = 2\pi i\left(\frac{1-i}{16i} + \frac{-7-3i}{-48i}\right) = 2\pi i\cdot\frac{5}{24i} = \frac{5\pi}{12}.$$

Приклад 10.4. *Обчислити інтеграл* $I = \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}$, $(a>0)$.



$I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}$, бо підінтегральна функція $f(x) = \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}$– парна. Введемо функцію $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$, яка на дійсній осі, тобто при $z = x$, дорівнює $f(x)$. Функція $f(z)$ має у верхній півплощині полюс другого порядку в точці $z = ai$. Лишок $f(z)$ відносно цього полюса дорівнює

$$\operatorname*{res}_{ai} f(z) = \lim_{z\to ai}\left((z-ai)^2 f(z)\right)' = \lim_{z\to ai}\left(\frac{(z-ai)^2z^2}{(z-ai)^2(z+ai)^2}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to ai}\left(\frac{z^2}{(z+ai)^2}\right)' = \lim_{z\to ai}\frac{2aiz}{(z+ai)^3} = \frac{1}{4ai}.$$

Користуючись формулою (10.14), одержимо:

$I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot\frac{1}{4ai} = \frac{\pi}{4a}.$

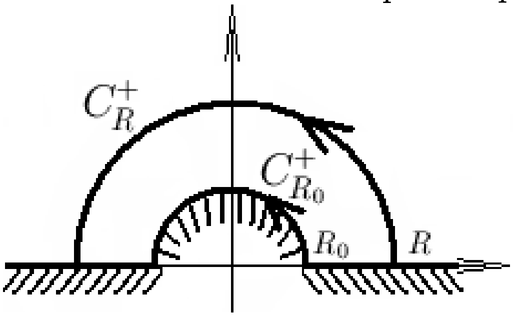
10.3. Задачі для самостійного розв’язання

Аудиторні вправи.	**Домашні вправи.**
Обчислити інтеграли:	
9.1. $\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{a+\cos\varphi}$ $(a>1)$	**9.5.** $\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{5-3\cos\varphi}$
9.2. $\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$ $(0<a<1)$	**9.6.** $\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos^2 3\varphi\ d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$ $(0<a<1)$
9.3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\ dx}{(x^2+4x+13)^2}$	**9.7.** $\int\limits_0^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$
9.4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a>0, b>0)$	**9.8.** $\int\limits_0^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

11. Інтеграли вигляду $\int\limits_0^{+\infty} R(x)\cos\lambda x dx,\ \int\limits_0^{+\infty} R(x)\sin\lambda x dx$

11.1. Лема Жордана

Інтеграли вигляду $\int\limits_0^{+\infty} R(x)\cos\lambda x dx$, $\int\limits_0^{+\infty} R(x)\sin\lambda x dx$, де $R(x)$ — правильний раціональний дріб, $\lambda > 0$ — будь-яке дійсне число. При обчисленні таких інтегралів зручно скористатися:



Теорема. (Лема Жордана):
1) $f(z)$ – аналітична у верхній півплощині зовні півкола $C_{R_0}^+$,
2) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$,
$\Longrightarrow$

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_R^+} f(z)e^{i\lambda z}dz = 0 \qquad (\lambda > 0). \tag{11.15}$$

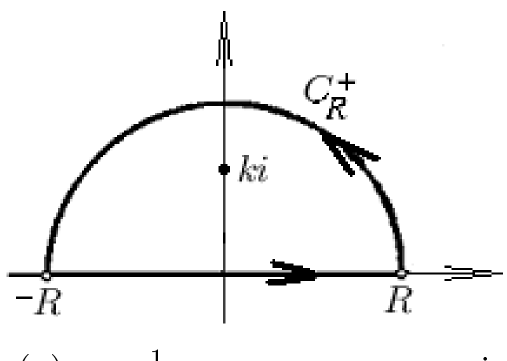
Теорема. 1) $f(z)$ – аналітична у верхній півплощині та на дійсній осі, крім скінченного числа точок $\{z_k\}_{k=1}^n$, $\mathrm{Im} z_k > 0$;

2) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$;

$$\Longrightarrow \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x dx = \mathrm{Re}\left(2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_k} f(z)e^{i\lambda z}\right) \qquad (\lambda > 0).$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x dx = \mathrm{Im}\left(2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_k} f(z)e^{i\lambda z}\right) \qquad (\lambda > 0).$$

Приклад 11.1. *Обчислити інтеграл* $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax\, dx}{x^2+k^2}$, $a > 0,\ k > 0$.



З формули Ейлера $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ випливає, що $I = \mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}\, dx}{x^2+k^2}$. Введемо функцію $f(z) = \frac{e^{aiz}}{z^2+k^2}$. При $z = x$ $\mathrm{Im} f(z)$ збігається з підінтегральною функцією. Розглянемо контур $\Gamma_R = C_R^+\bigcup[-R;R]$. При досить великому R на контурі C_R^+ функція $g(z) = \frac{1}{z^2+k^2}$ задовольняє нерівності: $|g(z)| < \frac{1}{R^2-k^2}$, отже, $g(z)$ наближаеться до нуля при $R \to \infty$. Отже, за лемою Жордана (11.15)

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R^+} \frac{e^{iaz}\,dz}{z^2+k^2} = 0.$$

Для будь-якого $R > k$ за теоремою Коші про лишки (9.13) маємо:

$$\int\limits_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz}\,dz}{z^2+k^2} = \int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{iax}\,dx}{x^2+k^2} + \int\limits_{C_R^+} \frac{e^{iaz}\,dz}{z^2+k^2} = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{ki} \left(\frac{e^{iaz}}{z^2+k^2}\right) =$$

$$= 2\pi i \cdot \lim_{z\to ki} \left(\frac{e^{iaz}}{z^2+k^2}(z-ik)\right) = 2\pi i \cdot \lim_{z\to ki} \left(\frac{e^{iaz}}{z+ki}\right) = 2\pi i \cdot \frac{e^{-ak}}{2ik} = \frac{\pi}{k}e^{-ak}.$$

При $R \to \infty$ одержимо:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}\,dx}{x^2+k^2} = \frac{\pi}{k}e^{-ak}.$$

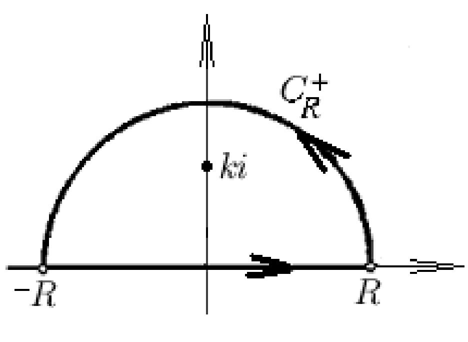
Відокремлюючи ліворуч і праворуч дійсні та уявні частини, одержимо:

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax\,dx}{x^2+k^2} = \mathrm{Re}(\frac{\pi}{k}e^{-ak}) = \frac{\pi}{k}e^{-ak}.$$

Зауваження.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax\,dx}{x^2+k^2} = \mathrm{Im}(\frac{\pi}{k}e^{-ak}) = 0.$$

Приклад 11.2. *Обчислити інтеграл* $I = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\sin ax\,dx}{x^2+k^2},\ a > 0, k > 0.$



Введемо допоміжну функцію $f(z) = \frac{ze^{aiz}}{z^2+k^2}$. При $z = x$ функція $\mathrm{Im} f(z)$ співпадає з підінтегральною функцією. Розглянемо контур $\Gamma_R = C_R^+ \bigcup [-R; R]$. При досить великому R на контурі C_R^+ функція $g(z) = \frac{z}{z^2+k^2}$ задовольняє нерівності $|g(z)| < \frac{R}{R^2-k^2}$ і, отже, $g(z)$ прямує до нуля при $R \to \infty$.

Отже, за лемою Жордана (11.15):

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_R^+}\frac{ze^{iaz}\,dz}{z^2+k^2}=0.$$

Для будь-якого $R>k$ за теоремою Коші про лишки (9.13) маємо:

$$\int\limits_{\Gamma_R}\frac{ze^{iaz}\,dz}{z^2+k^2}=\int\limits_{-R}^{R}\frac{xe^{iax}\,dx}{x^2+k^2}+\int\limits_{C_R^+}\frac{ze^{iaz}\,dz}{z^2+k^2}=2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{ki}\left(\frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}\right)=$$

$$=2\pi i\cdot\lim_{z\to ki}\left(\frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}(z-ik)\right)=2\pi i\cdot\lim_{z\to ki}\left(\frac{ze^{iaz}}{z+ki}\right)=\pi ie^{-ak}.$$

У межі при $R\to\infty$ одержимо

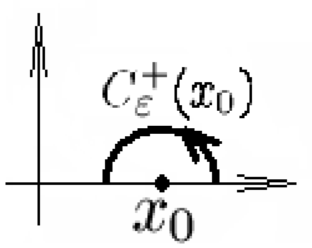
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{iax}\,dx}{x^2+k^2}=\pi ie^{-ak}.$$

Відокремлюючи ліворуч і праворуч дійсні та уявні частини, одержимо:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin ax\,dx}{x^2+k^2}=\pi e^{-ak}.$$

У силу того, що підінтегральна функції парна: $\quad I=\frac{\pi}{2}e^{-ak}.$

11.2. Інтеграли з особливими точками на дійсній осі

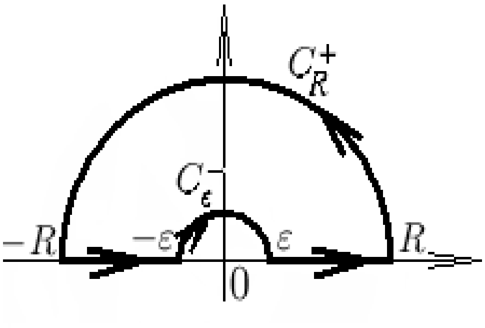


Теорема. (лема про простий полюс).
$f(z)$ – аналітична у верхній півплощині та на дійсній осі, крім точки $z_0=x_0\in\mathbb{R}$, у якій $f(z)$ має простий полюс
$\Longrightarrow$

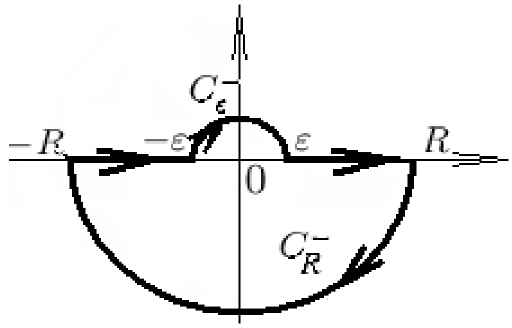
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{C_\varepsilon^+(x_0)}f(z)dz=\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=x_0}f(z)$$

Приклад 11.3. *Знайти інтегральний вигляд функції Хевісайда*

$$\eta(t)=\begin{cases}0 \text{ при } t<0,\\ 1 \text{ при } t>0.\end{cases}$$



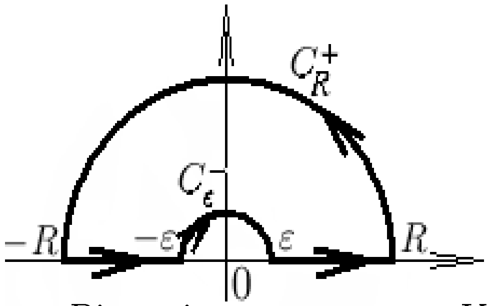
Розглянемо функцію
$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{e^{-izt}\,dz}{z},$$
де контур
$C=[R;\varepsilon]\bigcup C_\varepsilon^-(0)\bigcup[-\varepsilon;-R]$.
Замкнемо контур півколом $C_R^+(0)$, зауважимо, що при $t<0$
по лемі Жордана (11.15), інтеграли $\int\limits_{C_R^-(0)}\frac{e^{-izt}\,dz}{z}\to 0$ при $R\to\infty$. Всередині цього контура підінтегральна функція аналітична, одержимо, що $f(t)=0$ при $t<0$.



Побудуємо тепер замикання контура за допомогою півкола $\widetilde{C}_R^-(0)$, що лежить в нижній півплощині. Тепер при $t>0$ знову одержимо за лемою Жордана (11.15), що інтеграли
$\int\limits_{C_R^-(0)}\frac{e^{-izt}\,dz}{z}\to 0$ при $R\to\infty$. Але тепер точка $z=0$ всередині контура інтегрування. Отже, за теоремою Коші про лишки
$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{e^{-izt}\,dz}{z}=1,\quad t>0.$$
$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{e^{-izt}\,dz}{z}=\begin{cases}0 \text{ при } t<0,\\ 1 \text{ при } t>0.\end{cases}=\eta(t).$$

Приклад 11.4. *Обчислити інтеграл* $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin ax\,dx}{x(x^2+b^2)}$, $a>0,\ \ b>0$.

Розглянемо функцію $f(z)=\frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}$, її уявна частина $\mathrm{Im}f(z)$ збігається з підінтегральною функцією при $z=x$. Функція $f(z)$ має особливість на дійсній осі — простий полюс в точці $z=0$. Тому контур інтегрування Γ_R виберемо так:
особлива точка $z=0$ обходиться малим півколом $C_\varepsilon^-(0)$, $\varepsilon<b$;
а півколо C_R вибираємо так, щоб $b<R$.



Таким чином, усередині замкнутого контура знаходиться лише один полюс функції $f(z)$ у точці $z = bi$.

Відповідно до теореми Коші про лишки:

$$\int\limits_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz}dz}{z(z^2+b^2)} = \int\limits_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{iax}dx}{x(x^2+b^2)} + \int\limits_{C_\varepsilon^-} \frac{e^{iaz}dz}{z(z^2+b^2)} + \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{iax}dx}{x(x^2+b^2)} + \int\limits_{C_R^+} \frac{e^{iaz}dz}{z(z^2+b^2)} =$$

$$= 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{bi} \frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)} = 2\pi i \cdot \lim_{z\to ki} \left(\frac{e^{iaz}(z-bi)}{z(z^2+b^2)} \right) = -\frac{\pi i e^{-ab}}{2b^2}.$$

Замінюючи в першому інтегралі x на $-x$ і поєднуючи його з третім інтегралом, одержимо:

$$\int\limits_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{iax}dx}{x(x^2+b^2)} + \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{iax}dx}{x(x^2+b^2)} = \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{(e^{iax}-e^{-iax})dx}{x(x^2+b^2)} = 2i \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin ax\, dx}{x(x^2+b^2)}.$$

Підінтегральна функція $\frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}$ може бути представлена у вигляді $\frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)} = \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{z} + \frac{\psi(z)}{z}$, де $\lim\limits_{z\to 0} \psi(z) = 0$, тому що $\lim\limits_{z\to 0} \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2} = \frac{1}{b^2}$.

Виконавши заміну $z = re^{i\varphi}$, $dz = ire^{i\varphi}d\varphi$ знаходимо

$$\int\limits_{C_\varepsilon} \frac{e^{iaz}dz}{z(z^2+b^2)} = \frac{1}{b^2} \int\limits_{C_\varepsilon} \frac{dz}{z} + \int\limits_{C_\varepsilon} \frac{\psi(z)dz}{z} =$$

$$= \frac{1}{b^2} \int\limits_{\pi}^{0} \frac{ire^{i\varphi}d\varphi}{re^{i\varphi}} + \int\limits_{\pi}^{0} \frac{ire^{i\varphi}\psi(re^{i\varphi})d\varphi}{re^{i\varphi}} = -\frac{i\pi}{b^2} - i \int\limits_{0}^{\pi} \psi(re^{i\varphi})d\varphi.$$

Причому $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^\pi \psi(re^{i\varphi})d\varphi = 0$. Тому що $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{1}{z(z^2+b^2)} = 0$, тоді за лемою Жордана (11.15) $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R^+} \frac{e^{iaz}dz}{z(z^2+b^2)} = 0$. Таким чином,

$$\int\limits_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz}dz}{z(z^2+b^2)} = 2i \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin ax dx}{x(x^2+b^2)} - \frac{\pi i}{b^2} = -\pi i \frac{e^{-ab}}{b^2},$$

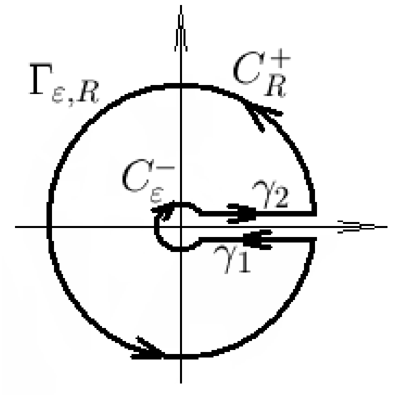
отже, $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax dx}{x(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{2b^2}(1 - e^{-ab})$.

11.3. Задачі для самостійного розв'язання

Аудиторні вправи.	**Домашні вправи.**
Обчислити інтеграли:	
10.1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x\ dx}{x^2-2x+10}$	**10.4.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x\ dx}{x^2-2x+10}$
10.2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x\ dx}{x^2-5x+6}$	**10.5.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x\ dx}{x^2+4x+20}$
10.3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\ dx}{(x^2+4)(x-1)}$	**10.6.** $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin 2x\, dx}{x^3+9x}$

12. Інтеграли від багатозначних функцій

12.1. Інтеграли від багатозначних функцій вигляду $\int\limits_0^{\infty} x^{\alpha-1}f(x)dx,\ (0<\alpha<1)$



Нехай функція $f(z)$ аналітична в $\mathbb{C}$, за винятком скінченного числа особливих точок $\{z_k\}_{k=1}^n$, що не лежать на додатній дійсній піввісі й точка $z=\infty$ є нулем функції $f(z)$. В області $G=\{z\in \mathbb{C}\ :\ 0<\arg z<2\pi\}$ виберемо однозначну гілку багатозначної функції $z^{\alpha-1}$ так, щоб $0<\arg z<2\pi$. Розглянемо контур $\Gamma_{\varepsilon,R}=C_R^+\bigcup\gamma_1\bigcup C_\varepsilon^-\bigcup\gamma_2$. За теоремою Коші про лишки

$$\int\limits_{\Gamma_R} z^{\alpha-1}f(z)dz=\int\limits_{C_R^+} z^{\alpha-1}f(z)dz+\int\limits_{\gamma_1} z^{\alpha-1}f(z)dz+\int\limits_{C_\varepsilon^-} z^{\alpha-1}f(z)dz+$$

$$+\int\limits_{\gamma_2} z^{\alpha-1}f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_k} z^{\alpha-1}f(z).$$

Розглянемо кожний з цих інтегралів окремо. За умов, накладених на функцію $f(z)$, знайдеться $M=const>0$ така, що в околі точки $z=\infty$ буде $|f(z)|<\frac{M}{|z|}$, а в околі точки $z=0$ — $|f(z)|<M$, тому:

$$\left|\int\limits_{C_R^+} z^{\alpha-1}f(z)dz\right|\le\frac{M}{R}R^{\alpha-1}2\pi R=\frac{2\pi M}{R^{1-\alpha}}\to 0,\ R\to+\infty;$$

$$\left|\int\limits_{C_\varepsilon^-} z^{\alpha-1}f(z)dz\right|\le M\varepsilon^{\alpha-1}2\pi\varepsilon=2\pi M\varepsilon^{\alpha}\to 0,\ \varepsilon\to 0.$$

$$\int\limits_{\gamma_2} z^{\alpha-1}f(z)dz=\begin{bmatrix} z=x,\\ \arg z=0\end{bmatrix}=\int\limits_{\varepsilon}^{R} x^{\alpha-1}f(x)dx$$

$$\int\limits_{\gamma_1} z^{\alpha-1}f(z)dz=\begin{bmatrix} z=xe^{2\pi i},\ \arg z=2\pi\\ z^{\alpha-1}=x^{\alpha-1}e^{2\pi i(\alpha-1)}=x^{\alpha-1}e^{2\pi i\alpha},\end{bmatrix}=-e^{2\pi i\alpha}\int\limits_{\varepsilon}^{R} x^{\alpha-1}f(x)dx.$$

Таким чином, при $\varepsilon \to 0$ і $R \to \infty$ одержимо:

$$\int\limits_0^{\infty} x^{\alpha-1} f(x)dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}} \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} \left(z^{\alpha-1} f(z)\right) =$$

$$= -\frac{\pi}{\sin \pi\alpha} e^{-\pi i\alpha} \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} \left(z^{\alpha-1} f(z)\right), \quad (0 < \alpha < 1). \qquad (12.16)$$

Приклад 12.1. *Обчислити інтеграл* $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt[3]{x}}$.

Використовуючи формулу (12.16) з $\alpha = 2/3$, одержимо:

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt[3]{x}} = \int\limits_0^{\infty} \frac{x^{2/3-1}dx}{(x^2+4)} = -\frac{\pi e^{\frac{-2\pi i}{3}}}{\sin\frac{2\pi}{3}} \left(\operatorname*{res}_{2i} \frac{z^{-1/3}}{z^2+4} + \operatorname*{res}_{-2i} \frac{z^{-1/3}}{z^2+4} \right) =$$

$$= -\frac{\pi}{\sqrt{3}/2} e^{\frac{-2\pi i}{3}} \left(\frac{2^{-1/3} e^{-\pi i/6}}{4i} - \frac{2^{-1/3} e^{-\pi i/2}}{4i} \right) = \frac{\pi}{2^{4/3}\sqrt{3}}.$$

12.2. Задачі для самостійного розв'язання

Аудиторні вправи.	**Домашні вправи.**
Обчислити інтеграли:	
11.1. $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^p(x+1)}$ $(0 < p < 1)$	**11.4.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(x+2)\sqrt[4]{x}}$
11.2. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln x \; dx}{x^2+a^2}$, $(a > 0)$	**11.5.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln^2 x \; dx}{x^2+a^2}$, $(a > 0)$
11.3. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln x \; dx}{\sqrt{x}(x+1)^2}$	**11.6.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln x \; dx}{\sqrt{x}(x^2+a^2)^2}$, $(a > 0)$

13. Операційне числення

13.1. Перетворення Лапласа

Оригіналом називається комплекснозначна функція дійсного агрументу $f(t)$, яка задовольняє умовам:

1) $f(t)$ кусково-гладка на $\mathbb{R}$;
2) $f(t) = 0$ при $t < 0$;
3) $\exists\ M > 0\ \exists\ s > 0\ \forall\ t > 0 \quad |f(t)| < Me^{st}$.

Зображенням функції-оригіналу $f(t)$ називається функція $F(p)$ комплексної змінної $p = s + i\sigma$, визначена інтегралом Лапласа

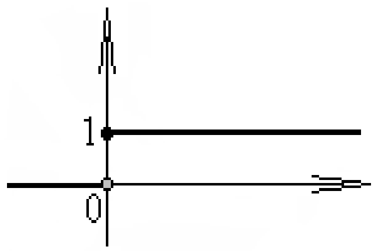
$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-p\cdot t} f(t)dt.$$

Так функції $f(t)$ ставиться у відповідність функція $F(p)$, цю відповідність називають *перетворенням Лапласа.* Відповідність між оригіналом $f(t)$ і зображенням $F(p)$ позначають:

$$\begin{array}{ll} f(t) \to F(p) & \text{або}\ \ F(p) \to f(t) \\ f(t) \risingdotseq F(p) & \text{або}\ \ F(p) \fallingdotseq f(t) \\ f(t) = L^{-1}F(p) & \text{або}\ \ F(p) = Lf(t) \end{array}$$

Оригінал будемо позначати маленькою буквою, а його зображення — відповідною великою: $x(t) \to X(p)$.

Функція $\eta(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0; \\ 0, t < 0 \end{cases}$ називається *функцією Хевісайда.*



Якщо функція $f(t)$ задовольняє умовам 1) і 3) з означення оригіналу, тоді функція $f(t)\eta(t)$– оригінал.

Зображення деяких функцій:

- функції Хевісайда $\quad \eta(t) \to \frac{1}{p}$, $\mathrm{Re}\, p > 0$;
- $e^{at} \to \frac{1}{p-a}$, $\mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}\, a$;
- $t^a \to \frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$, $a > 0$; $\ t^n \to \frac{n!}{p^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Властивості перетворення Лапласа.

1. *Лінійність*

$$\left.\begin{array}{l} f_1(t) \to F_1(p) \\ f_2(t) \to F_2(p) \end{array}\right\} \Rightarrow \forall a_1, a_2 \in \mathbb{C}:$$

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \to a_1 F_1(p) + a_2 F_2(p)$$

2. *Подібність*

$$f(t) \to F(p) \Rightarrow \forall a > 0: \quad f(at) \to \tfrac{1}{a} F\left(\tfrac{p}{a}\right).$$

3. *Запізнювання*

$$f(t) \to F(p) \Rightarrow \forall\ t_o > 0: \quad f(t - t_o) \to e^{-t_o p} F(p).$$

4. *Випередження*

$$f(t) \to F(p) \Rightarrow$$

$$\forall\ t_o > 0: \ f(t + t_o) \to e^{t_o p} \left(F(p) - \int\limits_0^{t_o} e^{tp} f(t) dt \right).$$

5. *Зміщення*

$$f(t) \to F(p) \Rightarrow \forall\ a \in \mathbb{C}: \ e^{-at} f(t) \to F(p + a).$$

6. *Диференціювання оригіналу*

$$\left.\begin{array}{l} 1) f(t) \to F(p) \\ 2) f(t), f'(t), \ldots, f^{(n)}(t) - \\ \text{оригінали} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f'(t) \to pF(p) - f(0); \\ f''(t) \to p^2 F(p) - pf(0) - f'(0); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(n)}(t) \to \\ \qquad p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0); \end{array}$$

де $f^{(k)}(0) = \lim\limits_{t \to +0} f^{(k)}(t), \quad k = 0, \ldots n - 1.$

7. *Диференціювання зображення*

$$\left.\begin{array}{l} 1) F(p) \to f(t) \\ 2) \mathrm{Re}\ p > s_o \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} F'(p) \to -tf(t); \\ F''(p) \to t^2 f(t); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F^{(n)}(p) \to (-1)^n t^n f(t); \end{array} \qquad \text{де Re } p > s_1 > s_o.$$

8. *Формула включення*

   Якщо виконані всі умови теореми про диференціювання оригіналу (див. 6), то $\lim\limits_{\mathrm{Re}p\to+\infty} f(p) = f(0)$ (тобто $\lim\limits_{p\to+\infty} f(p) = f(0)$).

9. *Інтегрування оригіналу*

   $f(t) \to F(p) \quad \mathrm{Re}\, p > s_o \Rightarrow \quad \int\limits_0^t f(\tau)d\tau \to \frac{F(p)}{p}, \ \mathrm{Re}\, p > s_o.$

10. *Інтегрування зображення*

    $$\left.\begin{array}{l} 1) f(t) \to F(p) \quad \mathrm{Re}\, p > s_0; \\ 2) \int\limits_p^\infty F(p)dp \text{ сх. при } \mathrm{Re}\, p > s_1 > s_0; \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \int\limits_p^\infty F(p)dp \to \frac{f(t)}{t}, \\ \mathrm{Re}\, p > s_1 > s_0. \end{array}$$

11. *Перша теорема розкладання*:

    Нехай зображення $F(p)$ є аналітичною в околі нескінченності функцією, та її ряд Лорана в цьому околі нескінченності має вигляд:

    $$F(p) = \frac{c_1}{p} + \frac{c_2}{p^2} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}.$$

    Тоді оригіналом для зображення $F(p)$ є функція $\eta(t)f(t)$, де

    $$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1}$$

    причому ряд збігається при всіх t.

12. *Друга теорема розкладання*:

    Якщо зображення $F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$ — дрібно-раціональна функція, тоді оригіналом є функція $\eta(t)f(t)$, де

    $$f(t) = \sum_{p_k} \operatorname*{res}_{p_k} F(p)e^{p\,t},$$

    причому сума лишків береться по всіх полюсах p_k функції $F(p)$.

    Наслідок.

    Якщо $F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$ — дрібно-раціональна функція і всі її полюси прості, то

    $$f(t) = \sum_{p_k} \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)}\, e^{p_k t}.$$

Таблиця оригіналів і зображень перетворення Лапласа.

Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$
$\eta(t-\alpha)=\begin{cases}1, \ t \geq \alpha\\ 0, \ t<\alpha\end{cases}$	$\frac{e^{-\alpha p}}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$
$t^\alpha, \ \ \mathrm{Re}\,\alpha>-1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
$t^b e^{at}, \ \ \mathrm{Re}\,b>-1$	$\frac{\Gamma(b+1)}{(p-a)^{b+1}}$
$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
$\mathrm{sh}\,at$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
$\mathrm{ch}\,at$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
$e^{-bt}\sin at$	$\frac{a}{(p+b)^2+a^2}$
$e^{-bt}\cos at$	$\frac{p+b}{(p+b)^2+a^2}$

Приклад 13.1. *Перевірити, чи є функція $f(t)$ оригіналом:*

$$a) \quad f(t)=\begin{cases}2e^{5t}, t\geq 0,\\ 0 \quad\ t<0;\end{cases} \qquad b) \quad f(t)=\begin{cases}3^{4^t}, t\geq 0,\\ 0 \quad t<0.\end{cases}$$

a) Функція $f(t)$ є оригіналом, бо всі умови означення виконані: властивості 1) і 2) очевидно, властивість 3) — зі сталими $M=2$, $s=5$.

b) Функція $f(t)$) не є оригіналом, бо вона зростає швидше ніж показникова функція (не виконується умова 3), оскільки $3^{4^t}>Me^{st}$ для всіх M і s, при $t>0$).

13.2. Застосування операційно числення при розв'язанні диференціальних рівнянь та їх систем

Будемо шукати розв'язки лінійного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t),$$

що задовольняє початковим умовам

$$y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}.$$

Припустимо, що невідома функція y, її похідні $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ і функція $f(t)$ є оригіналами. Нехай $y \to Y$, $f \to F$ за правилом диференціювання оригіналу:

$$\begin{array}{l} y'(t) \to pY(p) - y(0); \\ y''(t) \to p^2 Y(p) - py(0) - y'(0); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n)}(t) \to p^n Y(p) - p^{n-1} y(0) - \ldots - y^{(n-1)}(0); \end{array}$$

Користуючись властивістю лінійності, одержимо рівняння в зображеннях, що відповідає даному диференціальному рівнянню разом з початковими умовами:

$$p^n Y(P) - p^{n-1} y(0) - \ldots - y^{(n-1)}(0) +$$

$$+ a_1 (p^{n-1} Y(P) - p^{n-2} y(0) - \ldots - y^{(n-2)}(0)) + \ldots + a_n Y = F(p).$$

Члени рівняння з $Y(p)$ перенесемо в ліву частину, а інші перенесемо в праву і в такий спосіб знайдемо зображення $Y(p)$ розв'язку:

$$Y = \frac{F(p) + p^{n-1} y(0) + \ldots + y^{(n-1)} + a_1 (p^{n-2} y(0) - \ldots - y^{(n-2)}(0)) + \ldots + a_{n-1} y(0)}{p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n.}$$

Позначимо множник при $Y(p)$ через $\chi(p)$:

$$\chi(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Це *характеристичний поліном* однорідного лінійного рівняння, що відповідає даному неоднорідному. Поліном, що залишився у правій частині, крім $F(p)$, позначимо $B(p)$, цей поліном виражає вплив початкових умов, і при нульових початкових даних $B(p) \equiv 0$. Тоді:

$$Y(p) = \frac{F(p)}{\chi(p)} + \frac{B(p)}{\chi(p)}.$$

Далі по $Y(p)$ знаходимо оригінал $y(t)$, який і буде рішенням даного диференціального рівняння, що задовольняє початковим умовам.

Приклад 13.2.

1) *Розв'язати диференціальне рівняння* $y'' - y' = 1$ *з початковими умовами* $y(0) = y'(0) = 0$.

Покладемо $y \to Y$. Тоді $y'(t) \to p(P); y''(t) \to p^2Y(P)$, тому що $1 \to \frac{1}{p}$, тоді рівняння в зображеннях буде мати вигляд $p^2Y - p = \frac{1}{p}$. Тоді

$$Y = \frac{1}{p(p^2 - p)} = \frac{1 - p^2 + p^2}{p^2(p-1)} = \frac{-1-p}{p^2} + \frac{1}{p-1} = \frac{-1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p-1}.$$

Але $\frac{1}{p^2} \to t$, $\frac{1}{p} \to 1$, $\frac{1}{p-1} \to e^t$, тому

$$y = -t - 1 + e^t.$$

2) *Розв'язати диференціальне рівняння* $y''' - 2y'' + y' = 4$ *з початковими умовами* $y(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = -2$.

Нехай $y \to Y$. Тоді за теоремою диференціювання оригіналу (властивість 6) знаходимо зображення:

$$\begin{aligned}
&4 \to \frac{4}{p};\\
&y'(t) \to pY(p) - y(0) = pY(p) - 1;\\
&y''(t) \to p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - p - 2;\\
&y'''(t) \to p^3Y(p) - p^2y(0) - py'(0) - y''(0) = p^3Y(p) - p^2 - 2p + 2.
\end{aligned}$$

Рівняння в зображеннях буде мати вигляд:

$$Y(p^3 - 2p^2 + p) = \frac{4}{p} + p^2 - 5.$$

Отже,

$$Y = \frac{4}{p^2(p-1)^2} + \frac{p^2 - 5}{p\,(p-1)^2} = \frac{p^3 - 5p + 4}{p^2(p-1)^2}.$$

Для побудови розв'язку можна:

• застосувати другу теорему розкладання (властивість 12)

$$y(t) = \operatorname*{res}_0 Y(p)e^{p\,t} + \operatorname*{res}_1 Y(p)e^{p\,t}$$

$$\operatorname*{res}_0 Y(p)e^{p\,t} = \begin{bmatrix} p=0 \\ \text{полюс 2-го порядку} \end{bmatrix} = \lim_{p\to 0}\left(p^2 Y(p)e^{p\,t}\right)' =$$

$$= \lim_{p\to 0} e^{p\,t}\left(\frac{3p^2-5}{(p-1)^2} + t\frac{p^3-5p+4}{(p-1)^2} - 2\frac{p^3-5p+4}{(p-1)^3}\right) = 3+4t.$$

$$\operatorname*{res}_1 Y(p)e^{p\,t} = \begin{bmatrix} p=1 \\ \text{полюс 2-го порядку} \end{bmatrix} = \lim_{p\to 1}\left(p^2 Y(p)e^{p\,t}\right)' =$$

$$= \lim_{p\to 1} e^{p\,t}\left(\frac{3p^2-5}{p^2} + t\frac{p^3-5p+4}{p^2} - 2\frac{p^3-5p+4}{p^3}\right) = -2e^t.$$

$y(t) = \operatorname*{res}_0 Y(p)e^{p\,t} + \operatorname*{res}_1 Y(p)e^{p\,t} = 3+4t-2e^t$;

• скористатися розкладанням на найпростіші дроби:

$$Y = \frac{p^3-5p+4}{p^2(p-1)^2} = \frac{3}{p} + \frac{4}{p^2} + \frac{-2}{p-1} + \frac{0}{(p-1)^2}.$$

Але $\frac{4}{p^2} \to 4t$, $\frac{3}{p} \to 3$, $\frac{-2}{p-1} \to -2e^t$, тому

$$y = 3+4t-2e^t.$$

3) *Розв'язати диференціальне рівняння* $y'' - 3y' + 2y = e^t$ *з початковими умовами* $y(0) = y'(0) = 0$.

Нехай $y \to Y$. Тоді за теоремою диференціювання оригіналу (властивість 6) знаходимо зображення:

$$\begin{aligned} &e^t \to \frac{1}{p-1}; \\ &y'(t) \to pY(p) - y(0) = pY(p); \\ &y''(t) \to p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p). \end{aligned}$$

Рівняння в зображеннях буде мати вигляд:

$$Y(p^2-3p+2) = \frac{1}{p-1}.$$

Отже,

$$Y = \frac{1}{(p^2-3p+2)(p-1)} = \frac{1}{(p-1)^2(p-2)}.$$

Для знаходження розв'язків розкладемо $Y(p)$ на найпростіші дроби:

$$Y = \frac{1}{(p-1)^2(p-2)} = \frac{-1}{p-1} + \frac{-1}{(p-1)^2} + \frac{1}{p-2}.$$

Але $\frac{1}{(p-1)^2} \to te^t$ (властивість 7), $\frac{1}{p-1} \to e^t$, $\frac{1}{p-2} \to e^2t$, тому

$$y = e^2t - e^t - te^t.$$

4) *Розв'язати диференціальне рівняння:*

$$ty'' + (2t-1)y' + (t-1)y = 0.$$

Нехай $y(t) \to Y(p)$. Тоді з властивостей диференціювання зображення й оригіналу (властивості 7 і 6), знаходимо зображення:

$$\begin{array}{ll} y(t) \to Y(p) & y'(t) \to pY(p) - y(0) \\ ty(t) \to -Y'(p); & ty'(t) \to -(pY(p) - y(0))' = -pY'(p) - Y(p) \end{array}$$

$$y''(t) \to p^2Y(p) - py(0) - y'(0)$$
$$ty''(t) \to -(p^2Y(p) - py(0) - y'(0))' = -p^2Y'(p) - 2pY(p) + y(0).$$

Рівняння в зображеннях буде мати вигляд:

$$Y'(p+1)^2 + 3(p+1)Y = 2y(0).$$

Отже,

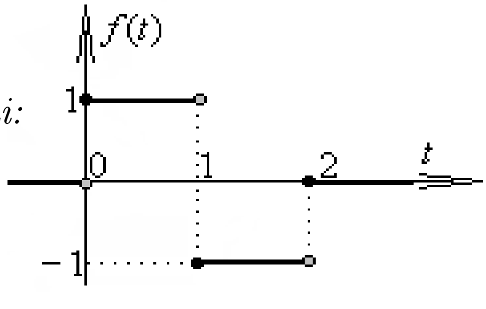
$$Y = \frac{y(0)}{p+1} + \frac{c_1}{(p+1)^3} \longrightarrow y(0) + c_1 \operatorname*{res}_{-1} \frac{e^{p\,t}}{(p+1)^3}.$$

$$\operatorname*{res}_{-1} \frac{e^{p\,t}}{(p+1)^3} = \left[\begin{array}{c} p=-1 \\ \text{полюс 3-го порядку} \end{array}\right] = \frac{1}{2} \lim_{p\to -1} \left((p+1)^3 \frac{e^{p\,t}}{(p+1)^3} \right)' =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{p\to -1} \left(e^{p\,t}\right)'' = \frac{1}{2} \lim_{p\to -1} t^2 e^{p\,t} = \frac{t^2}{2} e^{-t},$$

$$y(t) = y(0)e^{-t} + \frac{c_1}{2} t^2 e^{-t}.$$

Приклад 13.3. *Розв'язати задачу Коші:*



$$y'' + y = f(t), \qquad y(0) = y'(0) = 0,$$

якщо функція $f(t)$ задана графічно.

Знайдемо зображення функції $f(t)$, що задана графічно. Спершу знайдемо аналітичний вираз для неї:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{для } \ t \in (-\infty,\ 1), \\ 1 & \text{для } \ t \in [0,\ 1), \\ -1 & \text{для } \ t \in [1,\ 2), \\ 0 & \text{для } \ t \geq 2. \end{cases}$$

Таким чином, для всіх $t \in (-\infty,\ 1)$ ця функция співпадає з функцією Хевісайда, тобто $f(t) = \eta(t)$. Далі знайдемо функцію $\psi_1(t)$ таку, щоб при $t \geq 1$ виконувалось співвідношення $\eta(t) + \psi_1(t) = -1$, або $1 + \psi_1(t) = -1$, тоді $\psi_1(t) = -2\eta(t-1)$.

Тепер знаходимо функцію $\psi_2(t)$ таку, щоб при всіх $t \geq 2$ виконувалась рівність $-1 + \psi_2(t) = 0$. Тоді $\psi_2(t) = \eta(t-2)$. Значить,

$$f(t) = \eta(t) + \psi_1(t) + \psi_2(t) = \eta(t) - 2\eta(t-1) + \eta(t-2).$$

За теоремою запізнювання (властивість 3) $\boxed{f(t-t_0) \to e^{-pt_0}F(p),}$ одержимо

$$f(t) \to \frac{1}{p} - 2\frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p}.$$

Нехай $y(t) \to Y(p)$ і з початкових умов

$$y''(t) \to p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p),$$

одержимо операторне рівняння $\quad (p^2+1)Y(p) = \frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p}$, звідки

$$Y(p) = \frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p(p^2+1)} = \frac{1}{p(p^2+1)} - \frac{2e^{-p}}{p(p^2+1)} + \frac{e^{-2p}}{p(p^2+1)}.$$

Тому що $\frac{1}{p(p^2+1)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1} \to (1-\cos t)\eta(t)$, тоді за теоремою запізнювання (властивість 3)

$$\frac{e^{-p}}{p(p^2+1)} \to (1-\cos(t-1))\eta(t-1),\ \frac{e^{-2p}}{p(p^2+1)} \to (1-\cos(t-2))\eta(t-2).$$

Отже,

$$y(t) = (1-\cos t)\eta(t) - 2(1-\cos(t-1))\eta(t-1) + (1-\cos(t-2))\eta(t-2),$$

або

$$y(t) = 2\left(\sin^2\frac{t}{2}\eta(t) - 2\sin^2\frac{t-1}{2}\eta(t-1) + \sin^2\frac{t-2}{2}\eta(t-2)\right).$$

Приклад 13.4. 1) *Розв'язати систему рівнянь:*

$$\begin{cases} x + x' = y + e^t, & x(0) = 1, \\ y + y' = x + e^t, & y(0) = 1. \end{cases}$$

Нехай $x(t) \to X(p),\ y(t) \to Y(p)$. Тоді за теоремою диференціювання оригіналу (властивість 6) знаходимо зображення:

$$\begin{aligned} &e^t \to \tfrac{1}{p-1}, \\ &x'(t) \to pX(p) - x(0) = pX(p) - 1, \\ &y'(t) \to pY(p) - y(0) = pY(p) - 1. \end{aligned}$$

Система в зображеннях буде мати вигляд:

$$\begin{cases} X(p) + pX(p) - 1 = Y(p) + \frac{1}{p-1}, \\ Y(p) + pY(p) - 1 = X(p) + \frac{1}{p-1}. \end{cases}$$

Знаходячи з цієї системи $X(p), Y(p)$ і переходячи до оригіналів, одержимо:

$$\begin{cases} X(p) = \frac{1}{p-1} \to x(t) = e^t, \\ Y(p) = \frac{1}{p-1} \to y(t) = e^t. \end{cases}$$

2) *Розв'язати систему рівнянь:*

$$\begin{cases} x' = y + z, & x(0) = 3, \\ y' = x + z, & y(0) = -1, \\ z' = x + y, & z(0) = 2. \end{cases}$$

Нехай $x(t) \to X(p),\ y(t) \to Y(p),\ z(t) \to Z(p)$. Тоді за теоремою диференціювання оригіналу (властивість 6), знаходимо зображення:

$$\begin{aligned} &x'(t) \to pX(p) - x(0) = pX(p) - 3, \\ &y'(t) \to pY(p) - y(0) = pY(p) + 1, \\ &z'(t) \to pZ(p) - z(0) = pZ(p) - 2. \end{aligned}$$

Система в зображеннях буде мати вигляд:

$$\begin{cases} pX(p) - 3 = Y(p) + Z(p), \\ pY(p) + 1 = X(p) + Z(p), \\ pZ(p) - 2 = X(p) + Y(p). \end{cases}$$

Вирішуємо цю систему, наприклад, за правилом Крамера:

$$X(p) = \frac{\triangle_x}{\triangle}, Y(p) = \frac{\triangle_y}{\triangle}, Z(p) = \frac{\triangle_z}{\triangle},$$

$$\triangle = \begin{vmatrix} p & -1 & -1 \\ -1 & p & -1 \\ -1 & -1 & p \end{vmatrix} = p^3 - 3p - 2 = (p+1)^2(p-2),$$

$$\triangle_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & p & -1 \\ 2 & -1 & p \end{vmatrix} = p^2 + p - 2 = 3(p+1)\left(p - \frac{2}{3}\right),$$

$$\triangle_y = \begin{vmatrix} p & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & p \end{vmatrix} = -p^2 + 5p + 6 = -(p+1)(p-6),$$

$$\triangle_z = \begin{vmatrix} p & -1 & 3 \\ -1 & p & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2p^2 + 2p = 2p(p+1);$$

отже,

$$X(p) = \frac{3(p+1)\left(p - \frac{2}{3}\right)}{(p+1)^2(p-2)} = \frac{3p-2}{(p+1)(p-2)},$$

$$Y(p) = \frac{-(p+1)(p-6)}{(p+1)^2(p-2)} = -\frac{p-6}{(p+1)(p-2)},$$

$$Z(p) = \frac{2p(p+1)}{(p+1)^2(p-2)} = \frac{2p}{(p+1)(p-2)}.$$

Знаходячи оригінали для $X(p), Y(p), Z(p)$ за допомогою другої теореми розкладання (властивість 12), одержимо:

$$x(t) = \operatorname*{res}_{-1} \frac{3p-2}{(p+1)(p-2)} e^{p\,t} + \operatorname*{res}_{2} \frac{3p-2}{(p+1)(p-2)} e^{p\,t} = \frac{5}{3} e^{-t} + \frac{4}{3} e^{2t},$$

$$y(t) = \operatorname*{res}_{-1} \frac{-(p-6)}{(p+1)(p-2)} e^{p\,t} + \operatorname*{res}_{2} \frac{-(p-6)}{(p+1)(p-2)} e^{p\,t} = -\frac{7}{3} e^{-t} + \frac{4}{3} e^{2t},$$

$$z(t) = \operatorname*{res}_{-1} \frac{2p}{(p+1)(p-2)} e^{p\,t} + \operatorname*{res}_{2} \frac{2p}{(p+1)(p-2)} e^{p\,t} = \frac{2}{3} e^{-t} + \frac{4}{3} e^{2t}.$$

3) *Розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases} x'' = 3(y - x + z), & x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \\ y'' = x - y, & y(0) = 0, \quad y'(0) = -1, \\ z'' = -z, & z(0) = 1, \quad z'(0) = 0. \end{cases}$$

Нехай $x(t) \to X(p)$, $y(t) \to Y(p)$, $z(t) \to Z(p)$. Тоді за теоремою диференціювання оригіналу (властивість 6) знаходимо зображення:

$$x''(t) \to p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p),$$
$$y''(t) \to p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) + 1,$$
$$z''(t) \to p^2Z(p) - pz(0) - z'(0) = p^2Z(p) - p.$$

Система в зображеннях буде мати вигляд:

$$\begin{cases} p^2X(p) = 3(Y(p) - X(p) + Z(p)), \\ p^2Y(p) + 1 = X(p) - Y(p), \\ p^2Z(p) - p = -Z(p). \end{cases}$$

Вирішуючи цю систему відносно $X(p), Y(p), Z(p)$, одержимо:

$$X(p) = \frac{3(p-1)}{p^2(p^2+4)}, \quad Z(p) = \frac{p}{p^2+1},$$
$$Y(p) = \frac{3(p-1)}{p^2(p^2+1)(p^2+4)} - \frac{1}{p^2+1}.$$

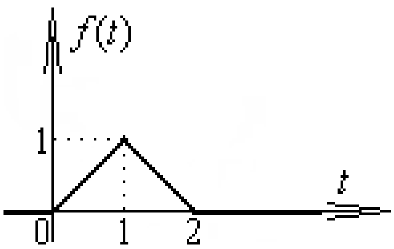
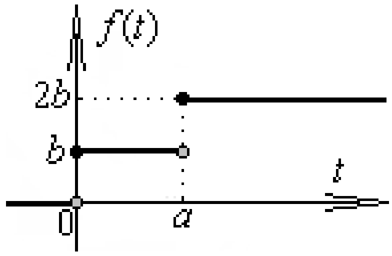
Знаходячи оригінали для $X(p), Y(p), Z(p)$, дістанемо:

$$x(t) = \frac{3}{4}(1-t) - \frac{3}{4}\cos 2t + \frac{3}{8}\sin 2t,$$
$$y(t) = \frac{3}{4}(1-t) + \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{8}\sin 2t - \cos t,$$
$$z(t) = \cos t.$$

13.3. Контрольні запитання

1) Яким умовам задовольняє функція-оригінал?
2) Наведіть означення функції-зображення.
3) Наведіть означення інтеграла Лапласа.
4) Сформулюйте теорему про диференціювання оригіналу.
5) Сформулюйте теорему про диференціювання зображення.
6) Сформулюйте першу теорему розкладання.
7) Сформулюйте другу теорему розкладання.

13.4. Задачі для самостійного розв'язання

Аудиторні вправи.	**Домашні вправи.**
12.1. Розв'язати рівняння:	
1) $y'' + y = 0,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0;$	**1)** $y'' + y' = 1,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1;$
2) $y'' - 2y' + y = e^t,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1;$	**2)** $y'' + 3y' = e^t,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = -1;$
3) $y'' + y = 2\cos t,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = -1;$	**3)** $y'' + 2y' = t\sin t,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0;$
4) $ty'' - 2y' = 0;$	**4)** $y'' + (t+1)y' + ty = 0,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = -1;$
12.2. Розв'язати задачу Коші, якщо функція $f(t)$ задана графічно:	
$y'' + 4y = f(t),$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$ 	$y'' + y = f(t),$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$ 
12.3. Розв'язати системи рівнянь:	
1) $\begin{cases} x' = -y, & x(0) = 2, \\ y' = 2x + 2y, & y(0) = 2; \end{cases}$	**1)** $\begin{cases} x' + y = 0, & x(0) = 1, \\ y' + x = 0, & y(0) = -1; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 4x' - y' + 3x = \sin t, & x(0) = 2, \\ x' + y = \cos t, & y(0) = -1; \end{cases}$	**2)** $\begin{cases} x' + y' - y = e^t, & x(0) = 0, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, & y(0) = 0; \end{cases}$
3) $\begin{cases} x' = -y - z, & x(0) = -1, \\ y' = -x - z, & y(0) = 0, \\ z' = -x - y; & z(0) = 1. \end{cases}$	**3)** $\begin{cases} x'' = x - y - z, & x(0) = 1, x'(0) = 0, \\ y'' = y - x - z, & y(0) = y'(0) = 0, \\ z'' = z - x - y; & z(0) = z'(0) = 0. \end{cases}$

13. Конформні відображення 2 (з Maxima)

13.1. Вступ

Тема «Конформні відображення» в курсі комплексного аналізу є необхідною, але важко засвоюваною основою для майбутнього вивчення спеціальних дисциплін. Труднощі в її вивченні пов'язані перш за все з тим, що необхідно використовувати знання, уміння і навички практично всіх раніше вивчених курсів, особливо з дисциплін «Математичний аналіз», «Аналітична геометрія», «Диференціальні рівняння», а також з її творчим характером. Оскільки в ній відсутні універсальні алгоритми, майже кожна задача унікальна.

У системі сучасної освіти інтенсивно використовуються технології навчання із застосуванням різних систем комп'ютерної математики (СКМ). Наявність їх великої кількості не означає, що успішно можна розв'язувати математичні задачі без відповідної теоретичної математичної підготовки, уміння розв'язувати «руками» такі завдання. СКМ є могутнім засобом комп'ютерної підтримки діяльності науковців, педагогів, інженерів, студентів, учнів, але ефективність і методична цінність таких засобів залежить від уміння його застосовувати.

В даному випадку була вибрана СКМ Maxima, оскільки Maxima є безкоштовною вільно поширюваною системою комп'ютерної математики, яка мало поступається за своїми можливостями таким визнаним лідерам, як Maple, Mathematica, MathCAD та інші. Maxima – система для роботи з символьними і чисельними виразами, що включає диференціювання, інтегрування, розкладання в ряд перетворення Лапласа, звичайні диференціальні рівняння системи лінійних рівнянь, багаточлени, множини, списки, вектори, матриці й тензори. Maxima проводить чисельні розрахунки високої точності, використовуючи точні дроби, цілі числа і числа з плаваючою точкою довільної точності. Система дозволяє будувати графіки функцій і статистичних даних в двох і трьох вимірюваннях. Також перевагою Maxima є те, що її початковий код може компілюватися в багатьох операційних системах, включаючи Windows, Linux і MacOS X. Тепер зосередимося на можливостях Maxima в розв'язанні задач теорії конформних відображень.

13.2. Приклади

У прикладах розв'язання задач цієї теми були використані лише декілька функцій Maxima. Їх докладний опис та повні списки параметрів можна подивитися у довідковій системі самої СКМ Maxima і у посібниках, присвячених цій системі, наприклад, [18]-[26].

При розв'язанні задач про відображення ліній та областей за допомогою відомого конформного відображення з використанням СКМ спершу треба параметризувати задану лінію або границю області. Решту етапів у СКМ Maxima виконує комбінація функцій draw або draw2d і transform. На жаль, у деяких цікавих випадках функція transform не працює і її роботу треба робити власноруч. Наприклад, не працює функція transform при малюванні кривої, яка задана неявно (параметр implicit функції draw2d).

Мінімально необхідні приклади в цій темі можна поділити на п'ять основних класів функцій: «Лінійні функції», «Дробово-лінійні функції», «Степеневі функції», «Функція Жуковського», «Трансцендентні функції. Однозначні гілки багатозначних функцій». Причому в кожному класі треба розглянути приблизно 5 завдань різної складності. Перші два завдання в кожному класі – це завдання відображення сітки декартової або полярної. Завдання 3, 4, 5 – це завдання відображення областей, серед яких обов'язково зустрінуться як обмежені прямими і колами, так і іншими лініями, що проходять через особливі точки функції, що відображає.

Приклад 13.1. *Знайти образи декартової координатної сітки під дією лінійного відображення* $w = (-3 - \sqrt{3}i)z + 2 - i$.

```
load(draw)$
c1:sea_green $ c2:turquoise$ c3:black$
```

Кольори $c1$ і $c2$ використовуються для ліній в z-площині та їх образів в w-площини, щоб одного погляду було досить для розуміння, яка лінія (або сімейство ліній) в яку (у яке сімейство) перейшла під дією даного відображення $f(z)$.

```
f(z):=(-3-sqrt(3)*%i)*z+2-%i$
display(f('z))$
```

$$f(z) = (-\mathrm{sqrt}(3)\%\mathrm{i} - 3)z - \%\mathrm{i} + 2$$

Виведення даних в СМК Maxima відбувається в текстовому (а не графічному, як, наприклад, в Maple) вигляді. Далі малюємо стрілку відображення з надписом у вигляді відображаючої функції.

```
z0:0, A:[realpart(z0),imagpart(z0)]$
s1:gr2d( axis_top=false, axis_bottom=false,
axis_left=false, axis_right =false,
xaxis=false, yaxis=false, xtics='none, ytics='none,
proportional_axes ='xy,
xrange=[-2,7], yrange=[-3,2],
font = ''Times-Roman", font_size = 12, color=black,
label([sconcat("w=", f('z)),2, -0.1]),
head_length=0.5, line_width=2, head_type ='nofilled,
vector([-2,-1],[7,0]))$
```

Тепер намалюємо лінії у z-площині.

```
z:x+%i*y$
s2:gr2d(title="z", line_width=3, proportional_axes='xy,
xrange=[-2.5,2.5], yrange=[-2.5,2.5],
color=black, grid = true,
axis_top = false, axis_bottom = false,
axis_left = false, axis_right = false,
xaxis=true, xaxis_color=grey70, xaxis_type=solid,
xtics=1, xtics_axis=true,
yaxis=true, yaxis_color=grey70, ytics_axis=true,
yaxis_type=solid, ytics=1,
```

Вище наведені необов'язкові параметри, необхідні лише з естетичної точки зору. Далі малюємо вертикальні прямі кольором c1, а горизонтальні прямі кольором c2.

```
color=c1, parametric(-2,t,t,-3,3),parametric(-1,t,t,-3,3),
parametric(0,t t-3,3), parametric(1,t,t-3,3),
parametric(2,t,t-3,3)
color=c2, parametric(t-2,t,-3,3),parametric(t-1,t,-3,3),
parametric(t,0,t-3,3),parametric(t,1,t,-3,3),
parametric(t,2,t,-3,3),
color=c3, point_size=1, point_type=7, points([A]) )$
```

Далі намалюємо лінії у w-площині.

```
s3:gr2d(title="w", line_width=3, proportional_axes='xy,
xrange=[-6,8], yrange=[-7,7], color=black, grid = true
axis_top = false axis_bottom = false axis_left = false
axis_right = false xaxis=true, xaxis_color=grey70,
xaxis_type=solid, xtics=1, xtics_axis=true, yaxis=true,
yaxis_color=grey70, ytics_axis=true, yaxis_type=solid,
ytics=1,
```

Функція transform видає образи графічних об'єктів, які йдуть за нею, під дією відображення $f(z)$. На жаль, функція transform не працює, якщо лінія задана неявно.

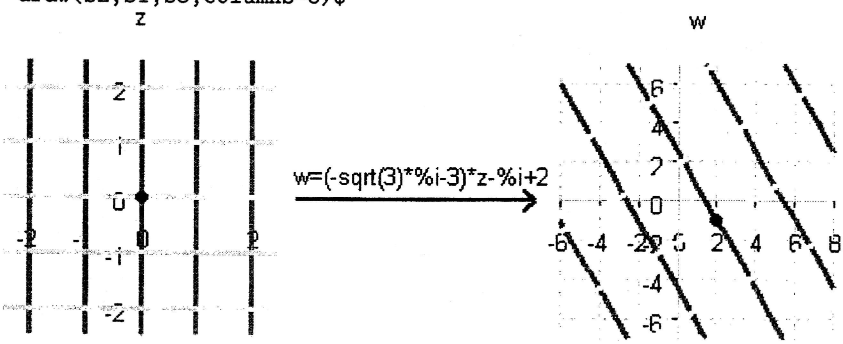
transform = [realpart(f(z)),imagpart(f(z)), x, y],

Тепер зобразимо образи вертикальних ліній кольором c1 і образи горизонтальних ліній кольором c2.

```
color=c1, parametric(-2,t,t,-3,3),parametric(-1,t,t,-3,3)
parametric(0,t, t-3,3), parametric(1,t,t-3,3)
parametric(2,t,t-3,3),
color=c2, parametric(t-2,t,-3,3),parametric(t-1,t,-3,3),
parametric(t,0, t-3,3),parametric(t,1,t,-3,3),
parametric(t,2,t,-3,3),
color=c3, point_size=1, point_type=7, points([A]) )$
```

І нарешті, все виводимо на екран.

```
draw(s2,s1,s3,columns=3)$
```



Далі обмежимося описом нюансів і картинками без подробиць.

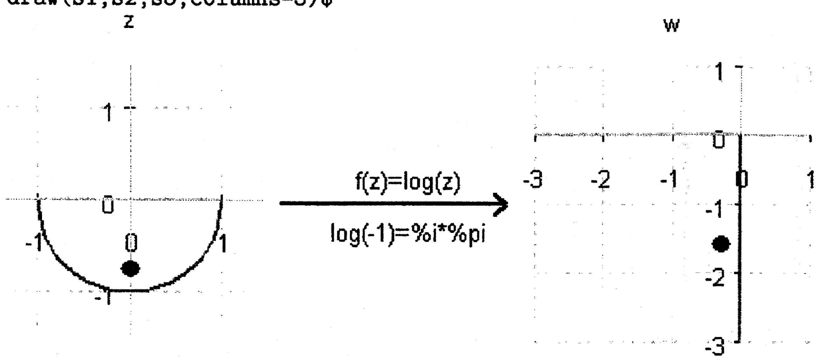
Приклад 13.2. *Знайти образ G області $D = \{z : \text{Im}z < 0, |z| < 1\}$ при відображенні функцією $w = \ln z$.*

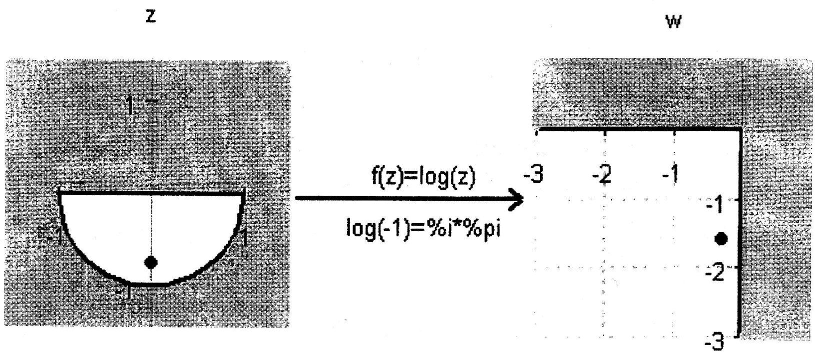
```
.........
f(z):=log(z)$
```

Зверніть увагу, що вбудована Maxima-функція $\log(z)$ – це головна гілка багатозначного логарифма натурального. Тому виводитимемо стрілку відображення з надписами $w = \log(z)$ вгорі (як завжди) і додатковим написом внизу $\log(-1) = i\pi$, щоб підкреслити вибрану гілку багатозначної функції.

```
z0:-3*%i/4$ A:[realpart(z0),imagpart(z0)]$ display(z0,A)$
s1:gr2d( title="z", line_width=2,
.........
color=c1, parametric(cos(t),sin(t),t-%pi,0),
color=c2, parametric(t,0,t,-1,1),
color=c3,point_size=1, point_type=7, points([A]))$
 S3:gr2d(title="w", line_width=2,
.........
transform = [realpart(f(z)),imagpart(f(z)), x, y],
color=c1, parametric(cos(t),sin(t),t-%pi,0),
color=c2, parametric(t,0,t,-1,1),
color=c3, point_size=1, point_type=7, points([A])$

draw(s1,s2,s3,columns=3)$
```





13.3. Задачі для самостійного розв'язання

Аудиторні вправи

Варіант 1

Знайти образи

1. дійсної $\operatorname{Im} z = 0$ і уявної $\{\operatorname{Re} z = 0\}$ осей та одиничного круга $\{|z| < 1\}$ при лінійному відображенні $w(z) = (1 - i)z + 2 + 3i$;
2. декартової координатної сітки $\{x = const,\ y = const\}$ при відображенні $w(z) = -i \sin(iz)$;
3. полярної координатної сітки $\{r = const, \varphi = const\}$ при відображенні функцією $w(z) = (1 + i)z^2$;
4. області $D = \{z\ :\ \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z > 0, |z| < 1, |z - i| > 1/2\}$ при дробово-лінійному відображенні $w(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$;
5. області $D = \{z\ :\ 1 < |z| < 2,\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$ при відображенні функцією Жуковського $w(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

Варіант 2

Знайти образи

1. дійсної $\operatorname{Im} z = 0$ і уявної $\{\operatorname{Re} z = 0\}$ осей та одиничного круга $\{|z| < 1\}$ при лінійному відображенні $w(z) = (-\sqrt{3} + i)z + 2 + 3i$;
2. декартової координатної сітки $\{x = const,\ y = const\}$ при відображенні $w(z) = \cos(iz)$;
3. полярної координатної сітки $\{r = const, \varphi = const\}$ при відображенні функцією $w(z) = iz^3 - 1$;
4. області $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z < 0, |z| < 2, |z + 2| > 1\}$ при дробово-лінійному відображенні $w(z) = \dfrac{iz + 2}{z + 2i}$;
5. області $D = \{z : 2 < |z| < 3,\ \frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{3}\}$ при відображенні функцією Жуковського $w(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

Варіант 3

Знайти образи

1. дійсної $\operatorname{Im} z = 0$ і уявної $\{\operatorname{Re} z = 0\}$ осей та одиничного круга $\{|z| < 1\}$ при лінійному відображенні $w(z) = iz + 1 + i$;
2. декартової координатної сітки $\{x = const,\ y = const\}$ при відображенні $w(z) = \exp(-iz)$;
3. полярної координатної сітки $\{r = const, \varphi = const\}$ при відображенні функцією $w(z) = z^{1/3} + 1,\ \sqrt[3]{1} = 1$;
4. області $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z > 0, |z| < 3, |z - 3| > 3/2\}$ при дробово-лінійному відображенні $w(z) = \dfrac{iz - 3}{z - 3i}$;
5. області $D = \{z : 1 < |z| < 3,\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{3}\}$ при відображенні функцією Жуковського $w(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

Варіант 4

Знайти образи

1. дійсної $\operatorname{Im} z = 0$ і уявної $\{\operatorname{Re} z = 0\}$ осей та одиничного круга $\{|z| < 1\}$ при лінійному відображенні $w(z) = (3+3i)z + 2 - i$;
2. декартової координатної сітки $\{x = const,\ y = const\}$ при відображенні $w(z) = \operatorname{sh}(-iz)$;
3. полярної координатної сітки $\{r = const, \varphi = const\}$ при відображенні функцією $w(z) = \ln(iz)$;
4. області $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z > 0, |z| < 3, |z+3| > 3/2\}$ при дробово-лінійному відображенні $w(z) = \dfrac{iz-3}{iz+3}$;
5. області $D = \{z : 2 < |z| < 3,\ \frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{2}\}$ при відображенні функцією Жуковського $w(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

Варіант 5

Знайти образи

1. дійсної $\operatorname{Im} z = 0$ і уявної $\{\operatorname{Re} z = 0\}$ осей та одиничного круга $\{|z| < 1\}$ при лінійному відображенні $w(z) = (\sqrt{3} - i)z + 3 + i$;
2. декартової координатної сітки $\{x = const,\ y = const\}$ при відображенні $w(z) = i\exp(iz)$;
3. полярної координатної сітки $\{r = const, \varphi = const\}$ при відображенні функцією $w(z) = iz^2 - 2$;
4. області $D = \{z : \operatorname{Im} z < 0, \operatorname{Re} z < 0, |z| < 2, |z+2| > 1\}$ при дробово-лінійному відображенні $w(z) = \dfrac{iz+2}{iz-2}$;
5. області $D = \{z : 3 < |z| < 4,\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}\}$ при відображенні функцією Жуковського $w(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

Варіант 6

Знайти образи

1. дійсної $\operatorname{Im} z = 0$ і уявної $\{\operatorname{Re} z = 0\}$ осей та одиничного круга $\{|z| < 1\}$ при лінійному відображенні $w(z) = -iz + 4 + i$;
2. декартової координатної сітки $\{x = const,\ y = const\}$ при відображенні $w(z) = \operatorname{ch}(iz)$;
3. полярної координатної сітки $\{r = const, \varphi = const\}$ при відображенні функцією $w(z) = i\sqrt{z} - 1$, $\sqrt{1} = 1$;
4. області $D = \{z : \operatorname{Im} z < 0, \operatorname{Re} z > 0, |z| < 3, |z - 3| > 3/2\}$ при дробово-лінійному відображенні $w(z) = \dfrac{z + 3i}{z - 3i}$;
5. області $D = \{z : 1 < |z| < 2,\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}\}$ при відображенні функцією Жуковського $w(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

Варіант 7

Знайти образи

1. дійсної $\operatorname{Im} z = 0$ і уявної $\{\operatorname{Re} z = 0\}$ осей та одиничного круга $\{|z| < 1\}$ при лінійному відображенні $w(z) = (\sqrt{3} + 3i)z + i$;
2. декартової координатної сітки $\{x = const,\ y = const\}$ при відображенні $w(z) = -i\cos(z)$;
3. полярної координатної сітки $\{r = const, \varphi = const\}$ при відображенні функцією $w(z) = (\sqrt{3} + i)z^3$;
4. області $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z < 0, |z| < 2, |z + 2| > 1\}$ при дробово-лінійному відображенні $w(z) = \dfrac{iz + 2}{iz - 2}$;
5. області $D = \{z : 2 < |z| < 3,\ \frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{2\pi}{3}\}$ при відображенні функцією Жуковського $w(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

Варіант 8

Знайти образи

1. дійсної $\operatorname{Im} z = 0$ і уявної $\{\operatorname{Re} z = 0\}$ осей та одиничного круга $\{|z| < 1\}$ при лінійному відображенні $w(z) = (3 - 3i)z + 2 - i$;
2. декартової координатної сітки $\{x = const,\ y = const\}$ при відображенні $w(z) = 2\sin(z)$;
3. полярної координатної сітки $\{r = const, \varphi = const\}$ при відображенні функцією $w(z) = (-1 - i)\sqrt[3]{z},\ \sqrt[3]{1} = 1$;
4. області $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z > 0, |z| < 3, |z - 3| > 3/2\}$ при дробово-лінійному відображенні $w(z) = \dfrac{z + 3i}{z - 3i}$;
5. області $D = \{z : 1 < |z| < 3,\ \frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{3\pi}{4}\}$ при відображенні функцією Жуковського $w(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

Варіант 9

Знайти образи

1. дійсної $\operatorname{Im} z = 0$ і уявної $\{\operatorname{Re} z = 0\}$ осей та одиничного круга $\{|z| < 1\}$ при лінійному відображенні $w(z) = (1 - \sqrt{3}i)z + 2 - i$;
2. декартової координатної сітки $\{x = const,\ y = const\}$ при відображенні $w(z) = i\operatorname{sh}(z)$;
3. полярної координатної сітки $\{r = const, \varphi = const\}$ при відображенні функцією $w(z) = i + z^4$;
4. області $D = \{z : \operatorname{Im} z < 0, \operatorname{Re} z < 0, |z| < 2, |z + 2| > 1\}$ при дробово-лінійному відображенні $w(z) = \dfrac{z - 2}{z + 2}$;
5. області $D = \{z : 3 < |z| < 4,\ \frac{\pi}{2} < \arg z < \pi\}$ при відображенні функцією Жуковського $w(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

Варіант 10

Знайти образи

1. дійсної $\operatorname{Im} z = 0$ і уявної $\{\operatorname{Re} z = 0\}$ осей та одиничного круга $\{|z| < 1\}$ при лінійному відображенні $w(z) = (-1 - i)z + 1 + i$;
2. декартової координатної сітки $\{x = const,\ y = const\}$ при відображенні $w(z) = -i\operatorname{ch}(z)$;
3. полярної координатної сітки $\{r = const, \varphi = const\}$ при відображенні функцією $w(z) = (1 - \sqrt{3}i)\sqrt{z}$, $\sqrt{1} = -1$;
4. області $D = \{z : \operatorname{Im} z < 0, \operatorname{Re} z > 0, |z| < 3, |z + 3i| > 3/2\}$ при дробово-лінійному відображенні $w(z) = \dfrac{z+3}{z-3}$;
5. області $D = \{z : 2 < |z| < 3,\ \frac{\pi}{3} < \arg z < \pi\}$ при відображенні функцією Жуковського $w(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

Варіант 11

Знайти образи

1. дійсної $\operatorname{Im} z = 0$ і уявної $\{\operatorname{Re} z = 0\}$ осей та одиничного круга $\{|z| < 1\}$ при лінійному відображенні $w(z) = (-\sqrt{3} - i)z + 2 - i$;
2. декартової координатної сітки $\{x = const,\ y = const\}$ при відображенні $w(z) = i\exp(z) + 1$;
3. полярної координатної сітки $\{r = const, \varphi = const\}$ при відображенні функцією $w(z) = iz^5$;
4. області $D = \{z : \operatorname{Im} z < 0, \operatorname{Re} z > 0, |z| < 3, |z - 3| > 3/2\}$ при дробово-лінійному відображенні $w(z) = \dfrac{iz-3}{iz+3}$;
5. області $D = \{z : 1 < |z| < 4,\ \pi < \arg z < \frac{5\pi}{4}\}$ при відображенні функцією Жуковського $w(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

Варіант 12

Знайти образи

1. дійсної $\operatorname{Im} z = 0$ і уявної $\{\operatorname{Re} z = 0\}$ осей та одиничного круга $\{|z| < 1\}$ при лінійному відображенні $w(z) = (\sqrt{3} - 3i)z + i$;
2. декартової координатної сітки $\{x = const,\ y = const\}$ при відображенні $w(z) = \sin(z + i)$;
3. полярної координатної сітки $\{r = const, \varphi = const\}$ при відображенні функцією $w(z) = i\ln z$;
4. області $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z < 0, |z| < 2, |z + 2| > 1\}$ при дробово-лінійному відображенні $w(z) = \frac{z - 2i}{z + 2i}$;
5. області $D = \{z : 0,5 < |z| < 1,\ \frac{7\pi}{6} < \arg z < \frac{5\pi}{4}\}$ при відображенні функцією Жуковського $w(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

Варіант 13

Знайти образи

1. дійсної $\operatorname{Im} z = 0$ і уявної $\{\operatorname{Re} z = 0\}$ осей та одиничного круга $\{|z| < 1\}$ при лінійному відображенні $w(z) = 2iz + 5 - 3i$;
2. декартової координатної сітки $\{x = const,\ y = const\}$ при відображенні $w(z) = \cos(iz - 1)$;
3. полярної координатної сітки $\{r = const, \varphi = const\}$ при відображенні функцією $w(z) = (1 + i)z^2$;
4. області $D = \{z : \operatorname{Im} z < 0, \operatorname{Re} z < 0, |z| < 2, |z - 1/2| > 3/2\}$ при дробово-лінійному відображенні $w(z) = \frac{z - 2}{z + 2}$;
5. області $D = \{z : 0,3 < |z| < 1,\ \pi < \arg z < \frac{7\pi}{4}\}$ при відображенні функцією Жуковського $w(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

Варіант 14

Знайти образи

1. дійсної $\operatorname{Im} z = 0$ і уявної $\{\operatorname{Re} z = 0\}$ осей та одиничного круга $\{|z| < 1\}$ при лінійному відображенні $w(z) = (1 + \sqrt{3}i)z + i$;
2. декартової координатної сітки $\{x = const,\ y = const\}$ при відображенні $w(z) = \exp(-3z)$;
3. полярної координатної сітки $\{r = const, \varphi = const\}$ при відображенні функцією $w(z) = -iz^4 + 2$;
4. області $D = \{z : \operatorname{Im} z < 0, \operatorname{Re} z < 0, |z| < 3, |z + 3i| > 3/2\}$ при дробово-лінійному відображенні $w(z) = \dfrac{z+3}{z-3}$;
5. області $D = \{z : 1 < |z| < 3,\ \frac{5\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{2}\}$ при відображенні функцією Жуковського $w(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

Варіант 15

Знайти образи

1. дійсної $\operatorname{Im} z = 0$ і уявної $\{\operatorname{Re} z = 0\}$ осей та одиничного круга $\{|z| < 1\}$ при лінійному відображенні $w(z) = (-1 + i)z + 2 - 2i$;
2. декартової координатної сітки $\{x = const,\ y = const\}$ при відображенні $w(z) = 2\operatorname{ch}(-iz)$;
3. полярної координатної сітки $\{r = const, \varphi = const\}$ при відображенні функцією $w(z) = i\ln(-z)$;
4. області $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z < 0, |z| < 2, |z - 1/2| > 3/2\}$ при дробово-лінійному відображенні $w(z) = \dfrac{z-2}{z+2}$;
5. області $D = \{z : 2 < |z| < 5,\ \frac{5\pi}{4} < \arg z < \frac{7\pi}{4}\}$ при відображенні функцією Жуковського $w(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

Варіант 16

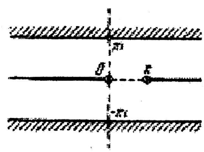
Знайти образи

1. дійсної $\operatorname{Im} z = 0$ і уявної $\{\operatorname{Re} z = 0\}$ осей та одиничного круга $\{|z| < 1\}$ при лінійному відображенні $w(z) = (-3 - 3i)z + 1 + i$;
2. декартової координатної сітки $\{x = const,\ y = const\}$ при відображенні $w(z) = 3\operatorname{sh}(z)$;
3. полярної координатної сітки $\{r = const, \varphi = const\}$ при відображенні функцією $w(z) = (1 + \sqrt{3}i)z^3$;
4. області $D = \{z\ :\ \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z < 0, |z| < 1, |z - i| > 1/2\}$ при дробово-лінійному відображенні $w(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$;
5. області $D = \{z\ :\ 0,2 < |z| < 1,\ -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$ при відображенні функцією Жуковського $w(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

Домашні вправи

Варіант 1

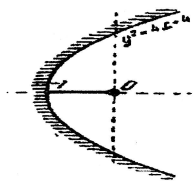
Знайти конформне відображення на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$:



1. області $\{z : |z| < 1, |z + 1| < 1\}$.
2. області, що зображена.

Варіант 2

Знайти конформне відображення на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$:

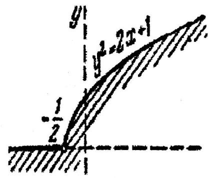


1. області $\{z : |z| < 2, |z - \sqrt{2}| > \sqrt{2}\}$.
2. області, що зображена.

Варіант 3

Знайти конформне відображення на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$:

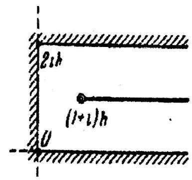
1. області $\{z : |z-1| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$.
2. області, що зображена.



Варіант 4

Знайти конформне відображення на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$:

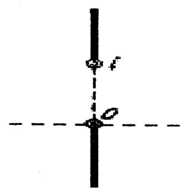
1. області $\{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$.
2. області, що зображена.



Варіант 5

Знайти конформне відображення на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$:

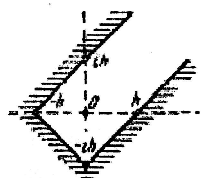
1. області $\{z : |z| < 1, |z-i| < 1\}$.
2. області, що зображена.



Варіант 6

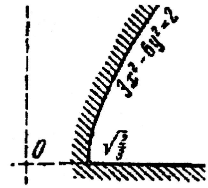
Знайти конформне відображення на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$:

1. області $\{z : |z| < 2, |z+\sqrt{2}| > \sqrt{2}\}$.
2. області, що зображена.



Варіант 7

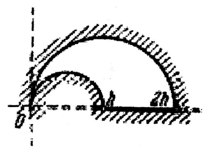
Знайти конформне відображення на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$:



1. області $\{z : |z+1| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$.
2. області, що зображена.

Варіант 8

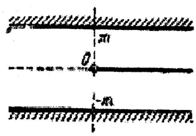
Знайти конформне відображення на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$:



1. області $\{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z < 0\}$.
2. області, що зображена.

Варіант 9

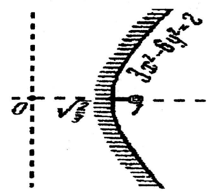
Знайти конформне відображення на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$:



1. області $\{z : |z| < 1, |z+1| < 1\}$.
2. області, що зображена.

Варіант 10

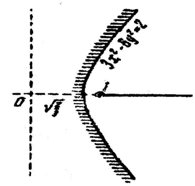
Знайти конформне відображення на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$:



1. області $\{z : z| > 3, \operatorname{Im} z > 0\}$.
2. області, що зображена.

Варіант 11

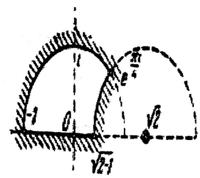
Знайти конформне відображення на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$:



1. області $\{z : |z| > 2, |z - \sqrt{2}| < \sqrt{2}\}$.
2. області, що зображена.

Варіант 12

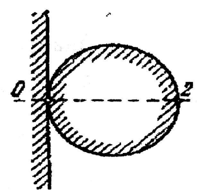
Знайти конформне відображення на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$:



1. області $\{z : |z - i| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}$.
2. області, що зображена.

Варіант 13

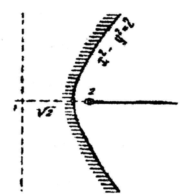
Знайти конформне відображення на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$:



1. області $\{z : |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}$.
2. області, що зображена.

Варіант 14

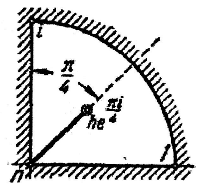
Знайти конформне відображення на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$:



1. області $\{z : |z| < 1, |z + 1| > 1\}$.
2. області, що зображена.

Варіант 15

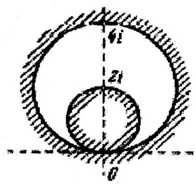
Знайти конформне відображення на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$:



1. області $\{z : |z+i| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}$.
2. області, що зображена.

Варіант 16

Знайти конформне відображення на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$:



1. області $\{z : |z| > 2, |z+\sqrt{2}| < \sqrt{2}\}$.
2. області, що зображена.

13.4. Приклади задач для модульної контрольної роботи №2

1. Знайти особливі точки функції $f(z) = \frac{z}{\sin z}$ і визначити їх тип.

2. Знайти головну частину ряду Лорана функції $f(z)$ в точці $z_0 = 0$.

3. Знайти лишки функції $f(z)$ у всіх ізольованих особливих точках.

4. Обчислити інтеграл $\oint\limits_{|z|<4} f(z)dz$.

Запитання «Допуску» до Модуля 2

1) Теорема Коші для однозв'язної області.
2) Інтегральна формула Коші.
3) Формули Даламбера та Коші для радіуса збіжності степеневого ряду.
4) Ряди Тейлора для e^z, $\sin(z)$, $\cos(z)$, $\ln(1+z)$, $(1+z)^\alpha$.
5) Означення нуля аналітичної функції кратності k.
6) Означення усувної особливості, полюса та істотної особливості.
7) Формула для знаходження лишку в полюсі порядку m функції $f(z)$.
8) Теорема Коші про лишки.
9) Лема Жордана.

ЛІТЕРАТУРА

Підручники

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.

2. Морозова В.Д. Теория функций комплексного переменного: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. – 520 с.

3. Гольдберг А.А., Шеремета М.М., Заблоцький М.В., Скасків О.Б. Комплексний аналіз. – Львів: Афіша, 2002. – 204 с.

4. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. – М.: Наука, 1970. – Т. 1 – 486 с.; Т. 2. – 624 с.

5. Привалов В. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1984. – 432 с.

6. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1989. – 480 с.

7. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, 1976. – Ч. 1. – 320 с.

8. Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1972. – 264 с.

9. Стоилов С. Теория функций комплексного переменного: в 2 т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – Т. 1. – 364 с.

10. Фукс Б. А., Шабат Б. В. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. – М.: Наука, 1964. – 388 с.

11. Радыгин В. М., Голубева О. В. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники: Учеб. пособие для пед. вузов. — М.: Высш. школа, 1983. – 160 с.

Задачники та навчальні посібники

12. Евграфов М. А., Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И., Бежанов К. А. Сборник задач по теории аналитических функций. – М.: Наука, 1968. – 416 с.

13. Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 2004. – 312 с.

14. Фаворов С.Ю. Методические указания на тему: Вычисление некоторых типов несобственных интегралов методами комплексного анализа. – Х.: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2001. – 24 с.

15. Зиненко С.Н. Математический анализ: в 2-х частях. – Ч.1. Функции одной переменной. – Х.: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2007. – 120 с.

16. Леонтьева Т. А., Панферов В. С., Серов В. С. Задачи по теории функций комплексного переменного. – М.: МГУ, 2005. – 360 с.

17. Самойленко В. Г., Бородін В. А., Верьовкіна Г. В., Ловейкін А. В., Романенко І. Б. Комплексний аналіз. Приклади і задачі: Навчальний посібник. – К.: Київський університет, 2010. – 224 с.

Підручники і сайти про Maxima

18. Стахин Н. А. Основы работы с системой аналитических (символьных) вычислений Maxima. – М.: МГУ, 2008. – 86 с.

19. Ильина В. А., Силаев П. К. Система аналитических вычислений Maxima для физиков-теоретиков. – М.: МГУ, 2007. – 86 с.

20. http://maxima.sourceforge.net/ru/

21. http://www. intuit.ru/department/se /pinform/8/

22. http://server.179.ru /tasks/maxima/1.html

23. http://beshenov .ru/maxima/minimal-maxima.pdf

24. http://iais.kemsu.ru/odocs/lisp/maxima /maxima-tarnavsky-1.html

25. http://etraining.mandriva.ru /index.php

26. http://www.pmtf.msiu.ru/chair31/students/spichkov/maxima2.pdf

Таблиця похідних

1. $(C)' = 0, \quad C = const;$

2. $(x^{\alpha})' = \alpha\, x^{\alpha-1}, \quad x > 0, \alpha \in \mathbb{R}, \quad$ або $\quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{N};$

3. $(a^x)' = a^x \ln(a), \quad a > 0,\ a \neq 1;$
   $(e^x)' = e^x;$

4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln(a)}, \quad x > 0, a > 0,\ a \neq 1;$
   $(\log_a |x|)' = \frac{1}{x\ln(a)}, \quad x \neq 0, a > 0,\ a \neq 1;$

5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0;$
   $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0;$

6. $(\sin x)' = \cos x;$

7. $(\cos x)' = -\sin x;$

8. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1),\ n \in \mathbb{Z};$

9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z};$

10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1;$

11. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1;$

12. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$

13. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$

14. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$

15. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$

16. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$

17. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad x \neq 0.$