Лекція 1. ОСНОВНІ УЯВЛЕННЯ ПРО ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

Вступ.

Вивчаючи явища навколишнього світу, дослідник часто зустрічається із процесами, перебіг яких у часі передбачити в точності неможливо. Ця невизначеність, непередбачуваність, викликана різними випадковими факторами, які впливають на хід процесу. Розглянемо кілька прикладів.

1) Радіоактивний розпад ядер атомів. Нехай для деякого зразка радіоактивної речовини фіксується число ядер n, що розпалися, за проміжки Δt часу . У загальному випадку число n не є постійним і змінюється від проміжку до проміжку випадковим чином. Очевидно, що значення n дискретні. Припускаючи, що $\Delta t = const$, можна вважати, що в даному досліді час також дискретний. Можлива залежність $n(t)$ показана на рис. 1. Якщо зафіксувати інтервал часу Δt_0, то $n(t)$ буде являти собою звичайну дискретну випадкову величину, яка розглядається в теорії ймовірностей.

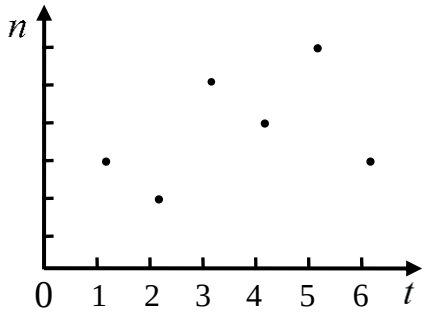

Рис. 1

2) Шуми в радіотехнічних схемах (генератор шуму). Нехай на виході деякої схеми виміряється напруга $u(t)$ (рис. 2). Фіксуємий шумовий сигнал є наслідком теплових явищ в елементах схеми. На відміну від першого прикладу величина $u(t)$ змінюється неперервно, час також неперервний. Фактично $u(t)$ являє собою деяку випадкову функцію часу. При фіксованому часі $t = t_0$ напругу $u(t_0)$ можна розглядати, як безперервну випадкову величину.

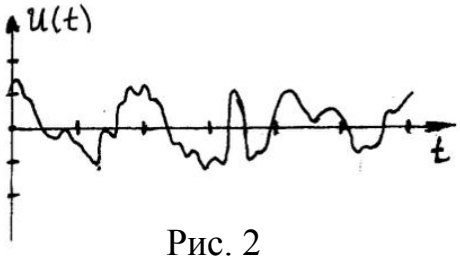

Рис. 2

3) Рух броуновської частинки. У кожний момент часу в поле зору мікроскопа фіксується положення частки - її абсциса $X(t)$ й ордината $Y(t)$ (рис. 3). Таким чином, стан частинки характеризується не однією, а двома випадковими функціями. Такий випадковий процес називається векторним, складові якого $X(t)$ й $Y(t)$ змінюються із часом. Для фіксованого моменту часу t_0 випадковий процес перетворюється в систему двох випадкових величин X і Y, зображуваний випадковою точкою (випадковим вектором $Q(t)$) на площині xOy. При зміні аргументу t точка $Q(t)$ буде переміщатися ("блукати") на площині xOy, як показано на рис. 3, для моментів часу $t_1, t_2, t_3, \ldots$.

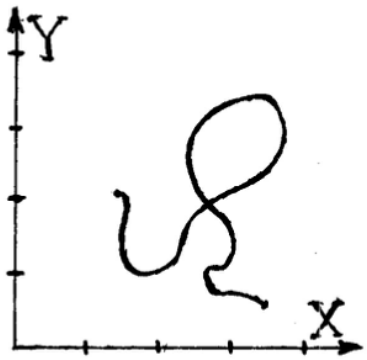

Рис. 3

Загальною закономірністю в перерахованих прикладах є розвиток у часі випадкових явищ, тобто явищ, протікання яких визначається численними випадковими факторами. Як відомо, описом випадкових явищ займається теорія ймовірностей. Однак методи класичної теорії ймовірностей виявляються

недостатніми. Задачу розвитку явищ у часі вирішує особливий розділ математики, одне з відгалужень теорії ймовірностей - теорія випадкових процесів.

Теорія випадкових процесів - це розділ математики, що вивчає закономірності випадкових явищ у динаміці їх розвитку.

Базові поняття

Визначення випадкового процесу. У широкому розумінні випадковим процесом називається будь-який процес, що протікає в часі, керований імовірнісними законами. Випадковий процес характеризується деякою функціональною залежністю від часу. У зв'язку із цим є більш чітке визначення: *випадковий процес - це особливого виду функція* $\xi = \xi(t)$*, яка характеризується тим, що в будь-який момент* t *прийняті нею значення є випадковими величинами*. Маючи на увазі це визначення, теорію випадкових процесів називають також теорією випадкових функцій. Слід також сказати, що поняття випадкової функції є більш широким, ніж випадковий процес, оскільки має на увазі залежність ξ не тільки від часу, але і яких-небудь інших параметрів, приміром, від координати. У даному курсі розглядається тільки часова залежність, так що поняття "випадковий процес" і "випадкова функція" вважаються ідентичними й надалі застосовуються обидва терміна.

Переріз випадкового процесу. Розглянемо деяку випадкову функцію $\xi = \xi(t)$. Якщо вибрати деяке значення $t = t_0$, то випадкова функція прийме значення $\xi(t_0)$, однак на відміну від звичайних детермінованих функцій, які при конкретному значенні аргументу приймають цілком певні значення, випадкова функція приймає заздалегідь невідоме значення, тобто є при даному $t = t_0$ випадковою величиною. Ця випадкова величина $\xi(t_0)$, у яку обертається випадковий процес (або випадкова функція), називається *перерізом* випадкового процесу, відповідним до даного значення аргументу t.

Реалізація випадкового процесу. Припустимо тепер, що дослід, у ході якого протікає випадковий процес, проведений. Це значить, що процес уже не є випадковим і його залежність від t прийняла цілком певний вид. Таким чином, отримана залежність є звичайною невипадковою функцією аргументу t. Отриману функцію називають реалізацією випадкового процесу $\xi(t)$ в даному досліді. *Реалізацією випадкового процесу* $\xi(t)$ називається невипадкова функція $x(t)$, у яку перетворюється випадковий процес $\xi(t)$ у результаті досліду, інакше кажучи, конкретний вигляд, прийнятий випадковим процесом $\xi(t)$, який спостерігався на деякому відрізку часу від 0 до τ (рис. 4).

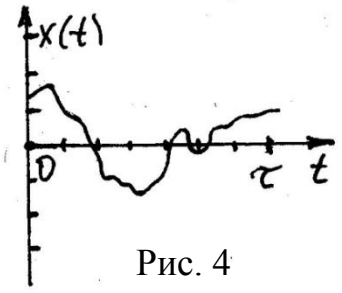

Рис. 4

Ансамблі реалізацій випадкового процесу. Якщо проведений не один дослід, а декілька, у результаті кожного з яких зафіксована деяка реалізація випадкового процесу $x_i(t)$ (i - номер досліду), то одержимо кілька реалізацій випадкового процесу $x_1(t), x_2(t), ..., x_i(t), ...$, які називають сімейством, або ансамблем реалізацій. Відзначимо, що дослід може проведений з однієї системою в різні інтервали часу, а також за той самий інтервал з декількома системами (ансамблем систем).

Ансамбль реалізацій випадкового процесу це основний експериментальний матеріал, на основі якого можна одержати характеристики випадкового процесу. Ансамбль реалізацій випадкового процесу є аналогією сукупності спостережених значень випадкової величини X, з тією різницею, що тут спостерігаються не числові значення, а функції.

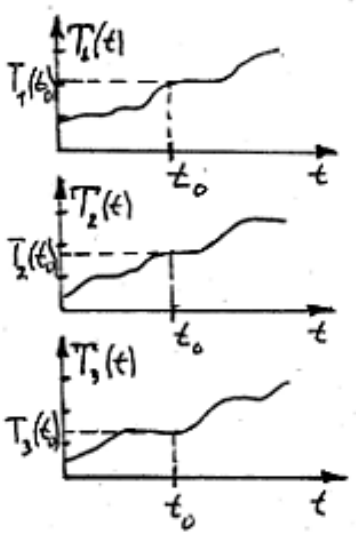

Рис. 5

Розглянемо приклад, що ілюструє введені визначення. Припустимо, що проводиться вимір температури трьох зразків, що перебувають в однакових умовах. Результат цих дослідів - це ансамбль реалізацій $T_1(t), T_2(t)$, $T_3(t)$ (рис. 5). Переріз $T(t_0)$ випадкового процесу $T(t)$ при $t = t_0$ являє собою випадкову величину, спостережені значення якої відзначені точками на вертикальній прямій $t = t_0 : T_1(t_0), T_2(t_0)$, $T_3(t_0)$.

Підсумуємо тепер вищесказане. Отже, випадковий процес $\xi(t)$ являє собою функцію, яка при кожному t є випадковою величиною (перерізом випадкового процесу). Поняття випадкового процесу є узагальненням випадкової величини на випадок, коли умови досліду не постійні, а змінюються. Випадкова величина ξ відповідає випадковому явищу в незмінних умовах досліду ("у статиці"), а випадковий процес $\xi(t)$ - в умовах, що змінюються ("у динаміці"), кожен переріз випадкового процесу $\xi(t)$ при заданому t є випадкова величина, а сукупність усіх перерізів при всіляких t і є випадковий процес $\xi(t)$. Отже, випадковий процес фактично являє собою систему випадкових величин - усіх перерізів цього процесу.

Класифікація випадкових процесів

Класифікацію випадкових процесів можна провести по характеру значень, які можуть приймати аргумент t і значення функції ξ.

Розглянемо спочатку першу ознаку, по якій відбувається класифікація випадкових процесів - характер зміни часу - дискретний або неперервний.

Випадковий процес $\xi(t)$ називається *процесом з дискретним часом*, якщо система, у якій він протікає, може змінювати свої стани тільки в моменти часу $t_1, t_2, ..., t_n, ...$, число яких кінцево або лічильно, тобто множина T - дискретне.

Випадковий процес $\xi(t)$ називається *процесом з неперервним часом*, якщо переходи системи зі стану в стан можуть відбуватися в будь-який момент t спостережуваного інтервалу τ. У цьому випадку множина T безперервно заповнює розглядаєму ділянку осі абсцис.

Прийнято називати $\xi(t)$ випадковим процесом, якщо t змінюється неперервно, і випадковою послідовністю, якщо t дискретно. Термін випадкова функція охоплює обидва ці випадки.

Розглянемо тепер другу ознаку, по якій відбувається класифікація випадкових процесів - характер зміни стану системи - дискретний або безперервний.

Випадковий процес $\xi(t)$ називається *процесом з дискретними станами*, якщо в будь-який момент часу t множина його значень (станів) ξ кінцево або лічильно. Інакше кажучи, якщо його переріз у будь-який момент t характеризується дискретною випадковою величиною $\xi(t_0)$

Випадковий процес $\xi(t)$ називається *процесом з неперервними станами*, якщо його переріз у будь-який момент t являє собою неперервну (або змішану) випадкову величину.

Отже, залежно від характеру множини T значень аргументу t, у які можливі переходи системи зі стану в стан, а також множини ξ самих станів, усі випадкові процеси можна розділити на 4 класи:

1) процеси з дискретними станами й дискретним часом (часові ряди);
2) процеси з дискретними станами й безперервним часом;
3) процеси з безперервними станами й дискретним часом;
4) процеси з безперервними станами й безперервним часом.

Розглянемо приклади кожного з перерахованих вище процесів.

1) Кількість ядер, що розпадаються, атомів деякого зразка радіоактивної речовини за певний проміжок часу (рис. 1). Кількість ядер, що розпадаються, - дискретна випадкова величина, час дискретний.

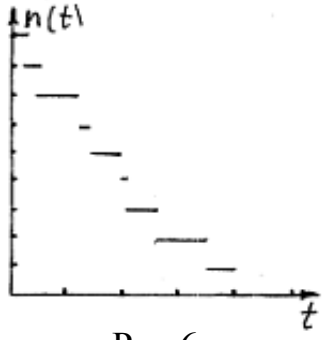

Рис.6

2) Число електронів в атомі при опроміненні потоком фотонів (рис. 6). Тут час безперервний (вважається, що потік фотонів досить інтенсивний, щоб вважати його безперервним; у цьому випадку час між двома актами іонізації може бути як завгодно малим), число електронів - дискретна випадкова величина, залежить від енергії фотона й перерізу взаємодії фотона з оболонкою.

3) Зміна абсолютної швидкості Δv молекул газу (рис. 7), а також напрямку руху (кута α). Ці зміни відбуваються в моменти зіткнення молекул. Δv і $\Delta\alpha$ - безперервні випадкові величини, час дискретний.

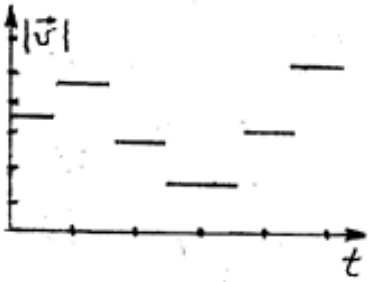

рис. 7

4) Сигнал на виході генератора шуму. Час змінюється неперервно, напруга - безперервна випадкова величина (рис. 2).