Министерство образования и науки, молодёжи и спорта Украины
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
СБОРНИК ЗАДАЧ

Учебно-методическое пособие
по линейной алгебре для студентов 1-го курса
физического и радиофизического факультетов

Харьков – 2011

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.151.5я73
П 18

Рецензенты: **Каткова О. М.** – кандитат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина;

Кондратьев Б. В. – кандитат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики физического факультета Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина.

Утверждено к печати Научно-методическим советом Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина (протокол № 3 от 22.02.2011).

Линейная алгебра. Сборник задач : учеб.-методич. пособ. / Сост.
П 18 Н. Д. Парфёнова. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2011. – 44 с.

Данное пособие предназначено для студентов первого курса физического и радиофизического факультетов. Материал разбит на темы, соответствующие темам практических занятий, даны задачи для аудиторной и домашней работы. Издание является сборником дополнительных задач к учебному пособию С. Н. Зиненко «Линейная алгебра».

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.151.5я73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Можно ли сказать, что негативное прошлое неизбежно определяет наше будущее? Неужели обучение в плохой школе, не давшей блестящих знаний, обрекает молодых людей? Разве в 17 лет ничего уже невозможно изменить? Конечно же, нет. Люди наделены свободой воли. Мы сами выбираем, какой будет наша жизнь. Все преподаватели желают своим студентам самого лучшего, поэтому хотели бы объяснить, как сделать правильный выбор. Трудно ли стать специалистом в выбранной профессии? Всё в ваших руках. Ничего невозможного никогда не требуется. Предъявлямые к студентам в процессе учебы и на экзаменах требования просты, разумны, и всем по силам их выполнить.

Данное пособие предназначено для студентов первого курса физического и радиофизического факультетов. Материал разбит на темы, соответствующие темам практических занятий, и даны задачи для аудиторной и домашней работы. Издание является сборником дополнительных задач к учебному пособию С. Н. Зиненко «Линейная алгебра» [1] .

В процессе изучения курса «Линейная алгебра» студенты должны выполнить два ИДЗ (индивидуальных домашних задания) [2] . В пособии приведен текст (без числовых данных) условий этих заданий.

При подготовке данного пособия был использован многолетний опыт преподавания этого курса на физическом и радиофизическом факультетах Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина, а также соответствующую учебную литературу.

Составитель выражает свою искреннюю благодарность С. Н. Зиненко, Н. И. Познахаревой, С. С. Апостолову и рецензентам Б. В. Кондратьеву и О. М. Катковой за критические замечания и ценные рекомендации.

1. Линейные пространства: определение, примеры. Линейно независимые системы векторов

Определение линейного пространства

Множество L элементов любой природы называют *линейным пространством (ЛП) над полем* K, если

задано сложение элементов L, т. е. закон, по которому любым элементам $x, y \in L$ ставится в соответствие элемент из L, называемый суммой элементов x и y и обозначаемый $x \oplus y$;

задано умножение элемента на число (скаляр) $\alpha \in K$, т. е. закон, по которому любому элементу $x \in L$ и любому числу $\alpha \in K$ ставится в соответствие элемент из L, называемый произведением элемента x на число α и обозначаемый $\alpha \odot x$;

указанные законы (линейные операции) подчиняются следующим аксиомам линейного пространства:

①	$\forall x, y \in L$	$\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = \mathbf{y} \oplus \mathbf{x},$	(коммутативность сложения)
②	$\forall x, y, z \in L$	$(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) \oplus \mathbf{z} = \mathbf{x} \oplus (\mathbf{y} \oplus \mathbf{z}),$	(ассоциативность сложения)
③	$\exists\, \theta \in L \;\; \forall x \in L$	$\mathbf{x} \oplus \theta = \mathbf{x},$	(определение нейтрального элемента)
④	$\forall x \in L \;\; \exists (-x) \in L$	$\mathbf{x} \oplus (-\mathbf{x}) = \theta,$	(определение противоположного элемента)
⑤	$\forall \alpha \in K \;\; \forall x, y \in L$	$\alpha \odot (\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) = \alpha \odot \mathbf{x} \oplus \alpha \odot \mathbf{y},$	(дистрибутивность сложения)
⑥	$\forall \alpha, \beta \in K \;\; \forall x \in L$	$(\alpha + \beta) \odot \mathbf{x} = \alpha \odot \mathbf{x} \oplus \beta \odot \mathbf{x},$	(дистрибутивность сложения)
⑦	$\forall \alpha, \beta \in K \;\; \forall x \in L$	$(\alpha \cdot \beta) \odot \mathbf{x} = \alpha \odot (\beta \odot \mathbf{x}),$	(ассоциативность умножения на число)
⑧	$1 \in K, \;\; \forall x \in L$	$\mathbf{1} \odot \mathbf{x} = \mathbf{x}.$	(умножение на единицу поля)

Замечания

1. Числовые поля: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
(На них определены сложение, вычитание, умножение и деление (кроме деления на 0), не выводящие из этого множества. Каждая операция над любыми двумя числами из этого множества даёт число из этого же множества.)

2. Линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ = *вещественное* линейное пространство.

Линейное пространство над полем $\mathbb{C}$ = *комплексное* линейное пространство.

Для краткости часто употребляют термин *линейное пространство,* не уточняя поле.

3. Обозначать сложение, умножение, ноль и противоположный элемент в поле и в ЛП одинаковыми значками не вполне хорошо, но очень удобно! Все формулы обычной школьной алгебры, которые осмыслены в данной ситуации, оказываются верными. Поэтому $\oplus, \odot, (-x)$ и θ будем использовать только на первых занятиях.

1.1. Образует ли линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ множество L с указанными операциями сложения и умножения на вещественное число ($n \in \mathbb{N}$)?

(a) $L = \mathcal{P}_n = \{$ множество многочленов с вещественными коэффициентами *степени не выше* n с обычными операциями сложения и умножения на число$\}$;

(b) $L = \{$ множество многочленов с вещественными коэффициентами *степени равной точно* n, с обычными операциями сложения и умножения на число$\}$;

(c) $L = \{$ множество многочленов от x с вещественными коэффициентами степени не выше 5, у которых коэффициент при x^3 равен 0, с обычными операциями сложения и умножения на число$\}$;

(d) $L = \{$ множество столбцов с n вещественными различными элементами с поэлементными операциями сложения и умножения на число$\}$;

(e) $L = \mathbb{R}^* = \{$ множество положительных вещественных чисел, если сумму элементов x и y определить как их произведение $x \cdot y$, а произведение элемента x на вещественное число α — как степень $x^\alpha\}$;

(f) $L = \mathcal{C}_{[a,\,b]} = \{$ множество всех непрерывных функций на отрезке $[a,\, b]$ с поточечными операциями сложения и умножения на число$\}$.

1.2. Образует ли линейное пространство над полем $\mathbb{C}$ множество с указанными операциями сложения и умножения на комплексное число ($n, m \in \mathbb{N}$)?

(a) $L = \mathbb{C}^n = \{$ множество столбцов с n комплексными элементами с поэлементными операциями сложения и умножения на число$\}$;

(b) $L = \mathbb{C}_{m\times n} = \{$ множество $m \times n$ матриц с комплексными элементами с поэлементными операциями сложения и умножения на число$\}$.

1.3. Является ли система векторов линейно независимой в линейном пространстве L?

(a) $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$, $\qquad L = \mathcal{P}_n$;

(b) $\{1, x-\alpha, (x-\alpha)^2, \ldots, (x-\alpha)^n\}$, $\qquad L = \mathcal{P}_n$;

(c) $\{1, x-\alpha, (x-\alpha)^2, x^2\}$, $\qquad L = \mathcal{P}_2$;

(d) $\{x, 2x\}$, $\qquad L = \mathcal{C}_{[a,\,b]}$;

(e) $\{\cos(x), \cos(2x), \cos(3x)\}$, $\qquad L = \mathcal{C}_{[0,\frac{\pi}{2}]}$.

Домашнее задание 1

1.4. Образует ли линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ множество L с указанными операциями сложения и умножения на вещественное число?

(a) $L = \mathbb{R}^n = \{$ множество столбцов с n вещественными элементами с поэлементными операциями сложения и умножения на число$\}$;

(b) $L = \{$ множество столбцов с n вещественными элементами такими, что сумма всех элементов равна 1, с поэлементными операциями сложения и умножения на число$\}$;

(c) $L = \{$ множество столбцов с n вещественными элементами, равными друг другу, с поэлементными операциями сложения и умножения на число$\}$;

(d) $L = \{$ множество многочленов от x с вещественными коэффициентами степени не выше 5, у которых коэффициент при x^3 равен 1, с обычными операциями сложения и умножения на число$\}$;

(e) $L = \{$ множество функций вида $A\cos(x+\alpha)$, где A и α — произвольные вещественные числа, с обычными операциями сложения и умножения на число$\}$;

(f) $L = \mathbb{C} = \{$ множество всех комплексных чисел с обычными операциями сложения и умножения на вещественное число$\}$.

1.5. Образует ли линейное пространство над полем $\mathbb{C}$ множество с указанными операциями сложения и умножения на комплексное число?

(a) $L = \{$ множество столбцов с n комплексными элементами, равными друг другу, с поэлементными операциями сложения и умножения на число$\}$;

(b) $L = \{$ множество симметрических квадратных матриц n-го порядка с комплексными элементами с поэлементными операциями сложения и умножения на число (матрица $A = (a_{ij})_{n\times n}$ называется *симметричной*, если $A = A^T$, т.е. $a_{ij} = a_{j\,i},\ i,j = 1,\dots,n)\}$.

1.6. Является ли система векторов линейно независимой в линейном пространстве L?

(a) $\{x, x^2, 2x(x+3)\}$, $\quad L = \mathcal{C}_{[a,b]}$;

(b) $\{\sin(x), \sin(2x), \sin(3x)\}$, $\quad L = \mathcal{C}_{[0,\frac{\pi}{2}]}$;

(c) $\{\sin(x), \cos(x), \sin(x+2)\}$, L из задачи 1.4(e);

(d) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\quad L$ из задачи 1.5(b), $n = 2$.

2. Полные системы векторов. Базис, размерность, координаты. Изоморфные пространства

2.1. Являются ли системы векторов из задачи 1.3 (a – e) полными в заданном линейном пространстве L?

2.2. Указать какой-либо базис в линейном пространстве L из задач 1.1 (a, c, e), 1.2 (a, b). Найти размерность L.

2.3. Найти координаты вектора f линейного пространства L в базисе $\triangle$:

(a) $f = 2\cos(x+3)$, L из задачи 1.4(e), $\triangle = \{\cos x, \sin x\}$;

(b) $f = A\cos(x+\alpha)$, L из задачи 1.4(e), $\triangle = \{\cos x, \sin x\}$;

(c) $f = 2 + 3x - 5x^2 + 4x^5$, $L = \mathcal{P}_n$, $\triangle = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$;

(d) $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, $L = \mathcal{P}_n$, $\triangle = \{1, x-\alpha, \ldots, (x-\alpha)^n\}$.

2.4. Являются ли одномерное пространство геометрических векторов и пространство из задачи 1.1(e) изоморфными?

Домашнее задание 2

2.5. Являются ли системы векторов из задачи 1.6 (a – c) полными в заданном линейном пространстве L?

2.6. Указать какой-либо базис в линейном пространстве L из задач 1.4 (a, c, e, f), 1.5 (a, b). Найти размерность L.

2.7. Найти координаты вектора f линейного пространства L в базисе $\triangle$:

(a) $f = 2\sin(x+3)$, L из задачи 1.4(e), $\triangle = \{\cos x, \sin x\}$;

(b) $f = A\sin(x+\alpha)$, L из задачи 1.4(e), $\triangle = \{\cos x, \sin x\}$;

(c) $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, $L = \mathcal{P}_n$, $\triangle = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$;

(d) $f = -2 + 5x^2 + 4x^3$, $L = \mathcal{P}_n$, $\triangle = \{1, x-1, (x-1)^2, \ldots, (x-1)^n\}$.

2.8. Являются ли трехмерное пространство геометрических векторов и пространство строк, состоящих из 3 элементов, изоморфными?

3. Подпространства. Сумма и пересечение подпространств

3.1. Выяснить, является ли линейным подпространством данное множество M векторов в вещественном линейном пространстве L :

$\underline{L = \mathbb{R}^n} = \{$ *вещественное координатное пространство — пространство столбцов высоты n с вещественными элементами*$\}$:

(a) $M = \{$ множество векторов, все координаты которых равны между собой$\}$;

(b) $M = \{$ множество векторов, сумма координат которых равна $1\}$;

$\underline{L = \mathbf{V}_3} = \{$ *геометрическое пространство — множество векторов пространства (направленных отрезков из общего начала)*$\}$:

(c) $M = \{$ множество векторов плоскости, параллельных данной прямой$\}$;

(d) $M = \{$ множество векторов x, для которых скалярное произведение с данным вектором $x_0 \neq 0$ равно a: $(x, x_0) = a$, где a – данное число$\}$;

(e) $M = \{$ множество векторов плоскости, образующих угол α с данной прямой $(0 \leq \alpha \leq \pi/2)\}$.

$\underline{L = \mathbb{R}_{n\times n} = \mathcal{M}_{n,n}} = \{$ *линейное пространство вещественных квадратных матриц n-го порядка*$\}$:

(f) $M = \{$ множество матриц с не нулевой первой строкой

(g) $M = \{$ множество нижнетреугольных матриц$\}$;

(h) $M = \{$ множество кососимметрических матриц$\}$;

(i) $M = \{$ множество вырожденных матриц$\}$;

$\underline{L = \mathcal{F}_{[a,b]}} = \{$ *линейное пространство функций, определенных на $[a, b]$*$\}$:

(j) $M = \{$ множество функций, дифференцируемых на $[a, b]\}$;

(k) $M = \{$ множество функций таких, что $\sup\limits_{[a,b]} |f(x)| \leq 1\}$;

(l) $M = \{$ множество функций, неотрицательных на $[a, b]\}$;

(m) $M = \{$ множество функций таких, что $f(a) = 0\}$;

(n) $M = \{$ множество функций таких, что $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty\}$;

(o) $M = \{$ множество функций, монотонных на $[a, b]\}$.

3.2. Даны два подпространства $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$ линейного вещественного пространства $\mathbf{L}$. Найти базис и размерность суммы $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$ и пересечения $\mathbf{L}_1 \bigcap \mathbf{L}_2$. Проверить справедливость формулы Грассмана.

$$\mathbf{L}_1 = \{x : \ x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \end{pmatrix}\}, \quad \mathbf{L}_2 = \{y : \ y = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}, \quad \mathbf{L} = \mathbb{R}^6.$$

3.3. Является ли система векторов линейно зависимой в $\mathbb{R}^4$? Если да, то найти эту зависимость.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3.4. Найти базис и размерность линейной оболочки системы векторов в $\mathbb{R}^4$ или в $\mathbb{R}^5$ соответственно.

(a) $$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix};$$

(b) $$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ -2 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

3.5. Найти базис и размерность суммы двух подпространств $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$ в $\mathbb{R}^5$.

$$\mathbf{L}_1 = \mathrm{Lin}\{a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\}, \mathbf{L}_2 = \mathrm{Lin}\{b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ -2 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}\}.$$

Домашнее задание 3

3.6. Выяснить, является ли линейным подпространством данное множество M векторов в вещественном линейном пространстве L :

$\underline{L = \mathbb{R}^n}$

(a) $M = \{$ множество векторов, первая координата которых равна $0\}$;

(b) $M = \{$ множество векторов, сумма координат которых равна $0\}$.

$\underline{L = \mathbf{V}_3}$

(a) $M = \{$ множество векторов, перпендикулярных данной прямой$\}$;

(b) $M = \{$ множество векторов x, для которых векторное произведение с данным вектором $x_0 \neq 0$ равно a: $[x, x_0] = a$, где a — данный вектор$\}$;

(c) $M = \{$ множество векторов, по модулю не превосходящих $1\}$.

$\underline{L = \mathbb{R}_{n\times n} = \mathcal{M}_{n,n}}$

(a) $M = \{$ множество диагональных матриц$\}$;

(b) $M = \{$ множество верхнетреугольных матриц$\}$;

(c) $M = \{$ множество симметрических матриц$\}$;

(d) $M = \{$ множество матриц X, удовлетворяющих условию $AX = XA$, где A – данная $n \times n$-матрица$\}$.

$\underline{L = \mathcal{F}_{[a,b]}}$

(a) $M = \{$ множество функций, интегрируемых по Риману на $[a, b]\}$;

(b) $M = \{$ множество функций, ограниченных на $[a, b]\}$;

(c) $M = \{$ множество функций, отрицательных на $[a, b]\}$;

(d) $M = \{$ множество функций таких, что $f(a) = 1\}$;

(e) $M = \{$ множество функций таких, что $f(a) = f(b)\}$;

(f) $M = \{$ множество функций, монотонно возрастающих на $[a, b]\}$.

3.7. (**№ 1.4.**) Даны два подпространства $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$ линейного вещественного пространства $\mathbf{L}$. Найти базис и размерность суммы $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$ и пересечения $\mathbf{L}_1 \bigcap \mathbf{L}_2$. Проверить справедливость формулы Грассмана.

$$\mathbf{L}_1 = \{p(t) : p(t) = a_0 + a_1 t^1 + a_2 t^2 + a_3 t^3\},$$
$$\mathbf{L}_2 = \{q(t) : q(t) = b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4\},$$
$$\mathbf{L} = \mathcal{P}_4.$$

3.8. (**№ 2.1.**) Является ли система векторов линейно зависимой в $\mathbb{R}^4$? Если да, то найти эту зависимость.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

3.9. (**№ 2.2.**) Найти базис и размерность линейной оболочки системы векторов в $\mathbb{R}^4$ или в $\mathbb{R}^5$ соответственно.

(a) $$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) $$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 4 \\ -8 \\ -14 \end{pmatrix}.$$

3.10. (**№ 2.3.**)Найти базис и размерность суммы двух подпространств $\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2$ в $\mathbb{R}^5$.

$$\mathbf{L}_1 = \mathrm{Lin}\{a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}, \mathbf{L}_2 = \mathrm{Lin}\{b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}\}.$$

Теоретические вопросы к самостоятельным работам №1 и №2

1. Определение линейно независимой системы векторов в линейном пространстве L над полем K.

2. Определение линейно зависимой системы векторов в линейном пространстве L над полем K.

3. Определение базиса в линейном пространстве L над полем K.

4. Определение размерности линейного пространства L над полем K.

5. Определение полной системы векторов в линейном пространстве L над полем K.

6. Определение нейтрального элемента линейного пространства L над полем K (аксиома 3).

7. Определение противоположного элемента в линейном пространстве L над полем K (аксиома 4).

4. Матрицы

4.1. Найти ранг матрицы A. Указать ее базисные строки и столбцы.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 8 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 3 & -13 & -3 & 9 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -1 & 9 & 1 & -4 \\ -3 & -3 & -1 & 7 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

4.2. Умножить матрицу A на вектор x.

(a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

4.3. Найти $2A$, $A + B$, AC, CA.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.4. Найти непосредственно явное выражение переменных $\{z_1, z_2, \ldots\}$ через переменные $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Проверить, что матрица C результирующего отображения $z = Cx$ равна $C = AB$, если $z = Ay$, $y = Bx$.

$$\begin{cases} z_1 = y_1 - y_2 \\ z_2 = -2y_1 + y_2 \\ z_3 = y_1 + y_2 \end{cases}, \begin{cases} y_1 = -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \\ y_2 = x_1 + 2x_3 - x_4 \end{cases}.$$

Домашнее задание 4

4.5. (**№ 2.4.**) Найти ранг матрицы A. Указать ее базисные строки и столбцы.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 6 & -4 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & -4 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 8 & -6 & -3 & 5 \end{pmatrix};$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 6 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 5 & -1 & -3 & 4 \\ 3 & -6 & 8 & -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

4.6. (**№ 6.1.**) Умножить матрицу A на вектор x.

(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$;

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4.7. (**№ 6.3.**) Найти $-3 \cdot A$, $A + B$, AC, CA.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.8. (**№ 6.4.**) Найти непосредственно явное выражение переменных $\{z_1, z_2, \ldots\}$ через переменные $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Проверить, что матрица C результирующего отображения $z = Cx$ равна $C = AB$, если $z = Ay$, $y = Bx$.

$$\begin{cases} z_1 = y_1 - 3y_2 \\ z_2 = -2y_1 + y_2 \\ z_3 = y_1 + 2y_2 \end{cases}, \begin{cases} y_1 = -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \\ y_2 = 4x_1 + x_3 - 3x_4 \end{cases}.$$

5. Определители

5.1. Определить число инверсий в перестановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

5.2. Подобрать j и k так, чтобы перестановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 7 & 4 & j & 5 & 6 & k & 9 \end{pmatrix}$ была четной.

5.3. Выяснить, какие из приведеных произведений входят в определитель соответствующего порядка и с каким знаком:

(a) $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$;

(b) $a_{13}a_{24}a_{23}a_{41}a_{55}$;

(c) $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$.

5.4. Найти определитель матрицы, раскрывая «по строке» или «по столбцу»:

$$(a)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix};\ (b)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 7 & 0 \\ 9 & 2 & 1 & 9 & 0 \\ 8 & 0 & 7 & 14 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ (c)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.5. Найти определитель матрицы, применяя метод Гаусса:

$$(a)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix};\ (b)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix};\ (c)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.6. Показать, что система векторов $\{a_1, a_2, \ldots\}$ образует базис и найти разложение вектора b по этому базису:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

5.7. Найти ранг матрицы и указать базисный минор:

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix};\ \text{(b)}\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 8 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 3 & -13 & -3 & 9 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -1 & 9 & 1 & -4 \\ -3 & -3 & -1 & 7 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Домашнее задание 5

5.8. Определить число инверсий в перестановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

5.9. Подобрать j и k так, чтобы перестановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & j & 2 & 5 & k & 4 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ была нечетной.

5.10. Выяснить, какие из приведеных произведений входят в определитель соответствующего порядка и с каким знаком:

(a) $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$;

(b) $a_{27}a_{36}a_{51}a_{75}a_{25}a_{43}a_{62}$;

(c) $a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$.

5.11. (**№ 5.1.**) Найти определитель матрицы, раскрывая «по строке» или «по столбцу»:

$$(a)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \end{pmatrix};(b)\begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 9 & 3 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 8 & 5 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix};(c)\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5.12. (**№ 5.2.**)Найти определитель матрицы, применяя метод Гаусса:

$$(a)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & -8 & -13 \end{pmatrix};(b)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -6 & -14 & -12 \\ 1 & -2 & -2 & -8 & 1 \end{pmatrix};(c)\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

5.13. (**№ 5.3.**) Показать, что система векторов $\{a_1, a_2, \ldots\}$ образует базис, и найти разложение вектора b по этому базису:

$$a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5.14. (**№ 5.4.**) Найти ранг матрицы и указать базисный минор:

$$\text{(a)}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & 10 & 7 & -6 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix};\ \text{(b)}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 6 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 5 & -1 & -3 & 4 \\ 3 & -6 & 8 & -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Системы линейных уравнений (метод Гаусса)

6.1. Найти

- общее решение однородной системы линейных уравнений с n неизвестными;
- ранг матрицы системы ($rang\,A$);
- базис и размерность подпространства решений $\mathbf{L}_0$;
- проверить справедливость равенства $rang\,A + dim\,\mathbf{L}_0 = n$.

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{rrrrl} x_1+ & 2x_2+ & 3x_3+ & 4x_4 = & 0 \\ x_1+ & x_2+ & 2x_3+ & 3x_4 = & 0 \\ x_1+ & 5x_2+ & x_3+ & 2x_4 = & 0 \\ x_1+ & 5x_2+ & 5x_3+ & 2x_4 = & 0 \end{array} \right. ;$$

$$\text{(b)} \left\{ \begin{array}{rrrrrl} -x_1+ & x_2- & 3x_3- & 4x_4+ & 4x_5 = & 0 \\ -3x_1- & 2x_2- & x_3+ & 3x_4+ & 2x_5 = & 0 \\ x_1+ & x_2- & x_3- & 2x_4 & = & 0 \\ -x_1+ & 2x_2- & 5x_3- & 5x_4+ & 6x_5 = & 0 \\ & x_2- & 2x_2- & x_4+ & 2x_5 = & 0 \end{array} \right. .$$

6.2. Найти

- общее решение неоднородной системы m линейных уравнений с n неизвестными;
- ранги матрицы $rang\,A$ и расширенной матрицы $rang\,\overline{A}$ системы;
- базис и размерность подпространства решений $\mathbf{L}_0$ соответствующей однородной системы;
- общее решение соответствующей однородной системы линейных уравнений;
- частное решение данной неоднородной системы линейных уравнений.

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{rrrrr} 5x_1- & 3x_2+ & 3x_3+ & 4x_4 = & 3 \\ 4x_1- & 2x_2+ & 3x_3+ & 7x_4 = & 1 \\ 8x_1- & 6x_2- & x_3- & 5x_4 = & 9 \\ 7x_1- & 3x_2+ & 7x_3+ & 17x_4 = & -1 \end{array} \right. ;$$

$$\text{(b)} \left\{ \begin{array}{rrrrrr} x_1- & 2x_2+ & 4x_3- & 6x_4+ & 3x_5 = & -3 \\ -x_1+ & 3x_2- & 7x_3+ & 8x_4- & 5x_5 = & 6 \\ -x_1+ & 2x_2- & 4x_3+ & 6x_4- & 3x_5 = & 3 \\ -x_1- & 2x_2+ & 8x_3- & 2x_4+ & 5x_5 = & -9 \end{array} \right. ;$$

(c) $\begin{cases} x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4+ & x_5 = & 1 \\ x_1+ & 2x_2+ & x_3+ & x_4+ & x_5 = & 0 \\ x_1+ & x_2+ & 3x_3+ & x_4+ & x_5 = & 3 \\ x_1+ & x_2+ & x_3+ & 4x_4+ & x_5 = & -2 \\ x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4+ & 5x_5 = & 5 \end{cases}$.

6.3. Найти решение систем с 2-мя неизвестными и дать геометрическую интерпретацию.

(a) $\begin{cases} 2x+ & y = & 4 \\ x- & y = & 8 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} 2x+ & y = & 4 \\ 2x+ & y = & 5 \end{cases}$; (c) $\begin{cases} 2x+ & y = & 4 \\ -2x- & y = & -4 \end{cases}$.

6.4. Найти решение систем с 3-мя неизвестными и дать геометрическую интерпретацию.

(a) $\begin{cases} x- & 2y+ & z = & 1 \\ 2x- & 3y+ & 4z = & 5 \\ -2x+ & y- & 7z = & -10 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} x- & 2y+ & z = & 1 \\ 2x- & 3y+ & 4z = & 5 \\ x- & y+ & 3z = & 4 \end{cases}$;

(c) $\begin{cases} x- & 2y+ & z = & 1 \\ 2x- & 4y+ & 2z = & 2 \\ -3x+ & 6y- & 3z = & -3 \end{cases}$; (d) $\begin{cases} x- & 2y+ & z = & 1 \\ 2x- & 3y+ & 4z = & 5 \\ x- & y+ & 3z = & 0 \end{cases}$;

(e) $\begin{cases} x- & 2y+ & z = & 1 \\ 2x- & 4y+ & 2z = & 0 \\ -3x+ & 6y- & 3z = & -1 \end{cases}$.

Домашнее задание 6

6.5. (**№ 3.3.**) Найти
- общее решение однородной системы линейных уравнений с n неизвестными;
- ранг матрицы системы ($rang\, A$);
- базис и размерность подпространства решений $\mathbf{L}_0$;
- проверить справедливость равенства $rang\, A + dim\, \mathbf{L}_0 = n$.

(a) $\begin{cases} x_1- & 3x_2+ & 4x_3+ & 5x_4 = & 0 \\ 2x_1- & 5x_2+ & 7x_3+ & 8x_4 = & 0 \\ x_1- & x_2+ & 2x_3+ & x_4 = & 0 \end{cases}$;

(b) $\begin{cases} x_1- & 2x_2+ & 3x_3+ & 2x_4+ & 6x_5 = & 0 \\ 2x_1- & 3x_2+ & 6x_3+ & 4x_4+ & 10x_5 = & 0 \\ x_1- & x_2+ & 3x_3+ & 2x_4+ & 4x_5 = & 0 \end{cases}$;

(c) $\begin{cases} 2x_1- & x_2- & 2x_3+ & 2x_4- & 3x_5 = & 0 \\ x_1- & 2x_2- & 4x_3+ & 4x_4- & 3x_5 = & 0 \\ -3x_1- & 3x_2- & 6x_3+ & 6x_4 & = & 0 \\ x_1- & x_2- & 2x_3+ & 2x_4- & 2x_5 = & 0 \end{cases}$.

6.6. (**№ 3.4.**) Найти

- общее решение неоднородной системы m линейных уравнений с n неизвестными;
- ранги матрицы $rang\,A$ и расширенной матрицы $rang\,\overline{A}$ системы;
- базис и размерность подпространства решений $\mathbf{L}_0$ соответствующей однородной системы;
- общее решение соответствующей однородной системы линейных уравнений;
- частное решение данной неоднородной системы линейных уравнений.

$$\text{(a)}\ \left\{\begin{array}{rrrrr} x_1- & x_2+ & 4x_3- & 4x_4= & 2\\ 2x_1- & x_2+ & 6x_3- & 7x_4= & 4\\ -x_1- & 2x_2+ & 2x_3+ & x_4= & -2\end{array}\right.;$$

$$\text{(b)}\ \left\{\begin{array}{rrrrrr} -2x_1+ & 3x_2+ & 7x_3+ & 3x_4- & 13x_5= & -1\\ x_1+ & 2x_2 & + & 9x_4- & 4x_5= & -3\\ -x_1- & x_2+ & x_3- & 6x_4+ & x_5= & 2\\ 3x_1+ & 2x_2- & 4x_3+ & 15x_4 & = & -5\end{array}\right.;$$

$$\text{(c)}\ \left\{\begin{array}{rrrrr} x_1- & 3x_2+ & 3x_3+ & 8x_4= & 7\\ x_1- & 2x_2+ & 6x_3+ & 9x_4= & 1\\ -x_1+ & 2x_2- & 5x_3- & 8x_4= & -2\\ 2x_1+ & 2x_2+ & x_3- & 5x_4= & -5\end{array}\right.;$$

6.7. (**№ 3.1.**) Найти решение систем с 2-мя неизвестными и дать геометрическую интерпретацию.

$$(a)\ \left\{\begin{array}{rrr} x- & 3y= & -2\\ 2x- & 5y= & -3\end{array}\right.;(b)\ \left\{\begin{array}{rrr} x- & 3y= & -2\\ -2x+ & 6y= & 4\end{array}\right.;(c)\ \left\{\begin{array}{rrr} x- & 3y= & -2\\ -2x+ & 6y= & 2\end{array}\right..$$

6.8. (**№ 3.2.**) Найти решение систем с 3-мя неизвестными и дать геометрическую интерпретацию.

$$(a)\ \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 3y- & z= & 4\\ -2x- & 5y & = & -11\\ 2x+ & 8y- & 5z= & 4\end{array}\right.;(b)\ \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 3y- & z= & 4\\ -2x- & 5y & = & -11\\ x+ & 2y+ & z= & 7\end{array}\right.;$$

$$(c)\ \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 3y- & z= & 4\\ -x- & 3y+ & z= & -4\\ 2x+ & 6y- & 2z= & 8\end{array}\right.;(d)\ \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 3y- & z= & 4\\ -2x- & 5y & = & -11\\ x+ & 2y+ & z= & 0\end{array}\right.;$$

$$(e)\ \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 3y- & z= & 4\\ -x- & 3y+ & z= & 0\\ 2x+ & 6y- & 2z= & 1\end{array}\right..$$

7. Приложения систем линейных уравнений

7.1. Является ли система векторов линейно зависимой в $\mathbb{R}^4$? Если да, то найти эту зависимость:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

7.2. Выяснить, принадлежит ли вектор b линейной оболочке $Lin\{\Delta\}$. Найти все разложения вектора b по системе Δ.

$$\Delta = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ -17 \\ 2 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 21 \\ 0 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} \}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

7.3. Показать, что система векторов Δ образует базис в $\mathbb{R}^5$, и найти разложение вектора b по этому базису.

$$\Delta = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

7.4. Найти базис и размерность пересечения двух подпространств $\mathbf{L}_1 \bigcap \mathbf{L}_2$ в $\mathbb{R}^5$. Проверить справедливость формулы Грассмана:

$$\mathbf{L}_1 = Lin\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \}, \ \mathbf{L}_2 = Lin\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \}.$$

Домашнее задание 7

7.5. (**№ 4.1.**) Является ли система векторов линейно зависимой в $\mathbb{R}^4$? Если да, то найти эту зависимость:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

7.6. (**№ 4.2.**) Выяснить, принадлежит ли вектор b линейной оболочке векторов $Lin\{\Delta\}$. Найти все разложения вектора b по системе Δ:

$$\Delta = \{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

7.7. (**№ 4.3.**)Показать, что система векторов Δ образует базис, и найти разложение вектора b по этому базису:

$$\Delta = \{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}\}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

7.8. (**№ 4.4.**) Найти базис и размерность пересечения двух подпространств $\mathbf{L}_1 \bigcap \mathbf{L}_2$ в $\mathbb{R}^5$. Проверить справедливость формулы Грассмана:

$$\mathbf{L}_1 = Lin\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}, \ \mathbf{L}_2 = Lin\{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}\}.$$

8. ИДЗ I

8.1. Применяя метод Гаусса, найти

(a) базис и размерность линейной оболочки столбцов $Lin\{q_1, q_2, \ldots\}$ и строк $Lin\{p_1, p_2, \ldots\}$ матрицы A;

(b) $rang\ A$, базисные строки и столбцы.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & -2 & -6 & 5 \\ -3 & -2 & -3 & 1 & 0 & -9 \\ -3 & -3 & -3 & 0 & 0 & -6 \\ 2 & -3 & 2 & -5 & 0 & 19 \end{pmatrix}.$$

8.2. Применяя метод Гаусса, найти

(a) общее решение $x_{он}$ системы линейных неоднородных уравнений $Ax = b$;

(b) ранги матрицы системы A и расширенной матрицы системы $\overline{A} = [A \,|\, b]$;

(c) общее решение x_{oo} соответствующей однородной системы $Ax = 0$, базис и размерность подпространства ее решений $\mathbf{L}_0$;

(d) частное решение $x_{чн}$ данной неоднородной системы;

(e) проверить непосредственно справедливость равенств

$$Ax_{oo} = 0, \qquad Ax_{чн} = b.$$

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrcr} 1x_1+ & 1x_2- & 2x_3+ & 0x_4+ & 0x_5 = & -1 \\ 2x_1+ & 3x_2- & 5x_3+ & 0x_4+ & 1x_5 = & -4 \\ 1x_1+ & 2x_2- & 3x_3+ & 0x_4+ & 1x_5 = & -3 \\ -3x_1+ & 1x_2+ & 2x_3+ & 0x_4+ & 4x_5 = & -5 \end{array} \right. .$$

8.3. Применяя метод Гаусса, найти $det\, A$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Домашнее задание 8

8.4. Выполните свое индивидуальное задание.

8.5. Выучите вопросы «допуска»:

(a) Дайте определение *линейно независимой системы* векторов в линейном пространстве L над полем K.

(b) Дайте определение *линейно зависимой системы* векторов в линейном пространстве L над полем K.

(c) Дайте определение *противоположного элемента* к элементу x в линейном пространстве L над полем K.

(d) Дайте определение *базиса* в линейном пространстве L над полем K.

(e) Дайте определение *размерности* линейного пространства L над полем K.

(f) Дайте определение *нейтрального элемента* в линейном пространстве L над полем K.

(g) Дайте определение *полной системы векторов* в линейном пространстве L над полем K.

(h) Дайте определение *ранга матрицы.*

(i) Сформулируйте *теорему о разложении определителя по i-й строке.*

(j) Сформулируйте *теорему о разложении определителя по j-му столбцу.*

(k) Сформулируйте *теорему Крамера.*

(l) Сформулируйте *теорему Кронекера – Капелли.*

9. Линейные операторы и их матрицы в данном базисе. Ядро и образ оператора. Обратный оператор

9.1. Проверить линейность оператора $\mathbf{A}$. Найти его матрицу $A = A_{\{e,f\}}$ в базисах $\{e, f\}$.

(a) $\mathbf{A} : \mathbf{V}_3 \to \mathbf{V}_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}\vec{x} = [\vec{x}, \vec{a}], \qquad \{e\} = \{f\} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$;

(b) $\mathbf{D} : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-1} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{D}P)(t) = \frac{d}{dt}P(t), \qquad \{e\} = \{f\} = \{1, t, t^2, \cdots\}$;

(c) $\mathbf{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}x = \begin{pmatrix} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 \\ 2x_1 + 5x_3 \\ x_2 - x_4 \end{pmatrix}$,

$\{e\}, \{f\}$ – канонические базисы в $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$.

9.2. Найти базис и размерность образа $Ran\ \mathbf{A}$ и ядра $Ker\ \mathbf{A}$ оператора $\mathbf{A}$, задаваемого матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 4 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 6 & -5 & 0 \\ -3 & 3 & 5 & -14 & 9 & -4 \\ 2 & -3 & -4 & 12 & -8 & 4 \end{pmatrix}$.

9.3. Найти обратную матрицу $A^{-1} = \frac{1}{det A}\widetilde{A}^T$: $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

9.4. Найти обратную матрицу A^{-1} по методу Гаусса: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

9.5. Выразить явно переменные $\{x_1, x_2, \ldots\}$ через переменные $\{y_1, y_2, \ldots\}$ и выяснить связь между матрицами линейных преобразований $y = Ax$ и $x = By$.

$$\begin{cases} y_1 = -x_1 + x_2 + 2x_4 \\ y_2 = 2x_1 - x_2 - 6x_4 \\ y_3 = -3x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 \\ y_4 = 2x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 \end{cases}.$$

9.6. Решить матричные уравнения $AX = C$, $YB = C$, $AZB = C$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad Y \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} Z \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Домашнее задание 9

9.7. (**№ 6.2.**) Проверить линейность оператора **A**. Найти его матрицу A в базисах $\{e, f\}$.

$\mathbf{C} : \mathbf{V}_3 \to \mathbf{V}_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C}\vec{x} = [[\vec{x}, \vec{a}], \vec{b}], \ \ \{e\} = \{f\} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\};$

$\mathbf{J} : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-1} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{J}P)(t) = \int\limits_0^t P(\tau)d\tau, \ \ \{e\} = \{f\} = \{1, t, t^2, \cdots\};$

$\mathbf{D} : \mathcal{P}_n^\lambda \to \mathcal{P}_n^\lambda \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{D}P^\lambda)(t) = \frac{d}{dt}P^\lambda(t), \ \ \{e\} = \{f\} = \{e^{\lambda t}1, e^{\lambda t}\frac{t}{1!}, e^{\lambda t}\frac{t^2}{2!}, \cdots\}.$

Замечание. $\mathcal{P}_n^\lambda$ – пространство квазиполиномов $P^\lambda(t) = e^{\lambda t}(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots)$, где λ – некоторое фиксированное вещественное число.

9.8. (**№ 7.1.**) Найти базис и размерность образа Ran **A** и ядра Ker **A** оператора **A**, задаваемого матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 6 & 4 & 10 & 1 \\ -3 & -3 & -9 & -6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

9.9. (**№ 7.4.**) Найти обратную матрицу $A^{-1} = \frac{1}{detA}\widetilde{A}^T$: $\quad A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

9.10. (**№ 7.5.**) Найти обратную матрицу A^{-1} методом Гаусса: $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & -4 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

9.11. (**№ 7.6.**) Выразить явно переменные $\{x_1, x_2, \ldots\}$ через переменные $\{y_1, y_2, \ldots\}$ и выяснить связь между матрицами линейных преобразований $y = Ax$ и $x = By$.

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \\ y_2 = 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 \\ y_3 = x_1 - x_2 + 3x_3 \\ y_4 = -x_1 + x_2 - 2x_4 \end{cases}.$$

9.12. (**№ 7.7.**) Решить матричные уравнения $AX = C$, $YB = C$, $AZB = C$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad X \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Матрица перехода к новому базису. Обратный оператор

10.1. Построить матрицу перехода T от старого базиса $\{e\} = \{1, t, t^2, t^3\}$ к новому $\{f\} = \{1, (t-t_0), (t-t_0)^2, (t-t_0)^3\}$ в пространстве $\mathcal{P}_3$ и матрицу перехода S от нового базиса к старому. Проверить, что $S = T^{-1}$.

10.2. Найти непосредственно координаты x, $\widetilde{x}$ вектора $P(t)$ в старом и новом базисах (см. задачу 10.1). Проверить справедливость формул $x = T\widetilde{x}$, $\widetilde{x} = T^{-1}x$.

10.3. Найти непосредственно матрицы D, $\widetilde{D}$ оператора дифференцирования $\mathbf{D} = \frac{d}{dt}$ в старом и новом базисах (см. задачу 10.1). Проверить справедливость формулы $D = T\widetilde{D}T^{-1}$.

10.4. Показать, что система векторов $\{f_1, \ldots, f_4\} \in \mathbb{R}^4$ образует базис. Найти матрицу перехода T от старого (канонического) базиса $\{e\}$ к новому $\{f\}$. Показать, что матрица перехода S от нового базиса $\{f\}$ к старому $\{e\}$ равна $S = T^{-1}$, где

$$f_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, f_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Домашнее задание 10

10.5. (**№ 8.1.**) Построить матрицу перехода T от старого базиса $\{e\} = \{1, t, t^2, t^3\}$ к новому $\{f\} = \{1, \frac{t}{1!}, \frac{t^2}{2!}, \frac{t^3}{3!}\}$ в пространстве $\mathcal{P}_3$ и матрицу перехода S от нового базиса к старому. Проверить, что $S = T^{-1}$.

10.6. (**№ 8.2.**) Найти непосредственно координаты x, $\widetilde{x}$ вектора $P(t)$ в старом и новом базисах (см. задачу 10.5). Проверить справедливость формул $x = T\widetilde{x}$, $\widetilde{x} = T^{-1}x$.

10.7. (**№ 8.3.**) Найти непосредственно матрицы D, $\widetilde{D}$ оператора дифференцирования $\mathbf{D} = \frac{d}{dt}$ в старом и новом базисах (см. задачу 10.5). Проверить справедливость формулы $D = T\widetilde{D}T^{-1}$.

10.8. (**№ 8.4.**) Показать, что система векторов $\{f_1, \ldots, f_4\} \in \mathbb{R}^4$ образует базис. Найти матрицу перехода T от старого (канонического) базиса $\{e\}$ к новому $\{f\}$. Показать, что матрица перехода S от нового базиса $\{f\}$ к старому $\{e\}$ равна $S = T^{-1}$, где

$$f_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, f_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

11. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

11.1. Найти собственные векторы $x_1, x_2, \dots$ и собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ оператора, заданного матрицей A. Проверить непосредственно справедливость равенства $Ax = \lambda x$. Проверить, что векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ -1 & -3 & 2 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$;

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$;

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$;

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Домашнее задание 11

11.2. (**№ 9.2.**) Найти собственные векторы $x_1, x_2, \dots$ и собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ оператора, заданного матрицей A. Проверить непосредственно справедливость равенства $Ax = \lambda x$. Проверить, что векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

(d) $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -3 \\ -3 & -6 & 3 \\ -3 & -7 & 4 \end{pmatrix}$.

12. Проекторы и спектральное разложение диагонализируемого оператора

12.1. Проверить, что оператор $\mathbf{P}$, задаваемый в $\mathbb{R}^n$ матрицей P, является оператором проектирования на некоторое подпространство F паралельно некоторому подпространству G, и построить проектор $\mathbf{Q}$ на подпространство G параллельно подпространству F :

$$P{\cdot}P \equiv P^2 = P \implies Q = I - P \implies Q{\cdot}Q \equiv Q^2 = Q \implies P{\cdot}Q = Q{\cdot}P = \theta.$$

Проверить, что

(a) $F = Ran\,P,\ G = Ker\,P \iff G = Ran\,Q,\ F = Ker\,Q,$
найдя предварительно подпространства F и G;

(b) справедливость разложения пространства в прямую сумму $\mathbb{R}^n = F \oplus G$;

(c) $\forall\, h \in \mathbb{R}^n \implies h = f + g,\ f \in F,\ g \in G \implies Ph = f,\ Qh = g$:

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

12.2. Для диагонализируемого оператора $\mathbf{A}$, задаваемого матрицей A,

(a) найти собственные векторы $\{t_k\}$ и собственные значения $\{\lambda_k\}$ оператора $\mathbf{A}$;

(b) проверить непосредственно справедливость равенств $\mathbf{A}t_k = \lambda_k t_k$;

(c) найти матрицу перехода T к базису из собственных векторов и матрицу Λ оператора в нем;

(d) проверить непосредственно справедливость равенства $A = T\Lambda T^{-1}$;

(e) найти «косые» проекторы $\mathbf{P}_k$ на собственные подпространства параллельно сумме других и проверить, что $\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_j = \delta_i j \mathbf{P}_j$;

(f) проверить непосредственно «косое» разложение единицы $\mathbf{I} = \sum\limits_k \mathbf{P}_k$ и спектральное разложение оператора $\mathbf{A}$: $\quad \mathbf{A} = \sum\limits_k \lambda_k \mathbf{P}_k$;

(g) вычислить значение характеристического полинома $p_A(\mathbf{A})$ непосредственно и используя спектральное разложение:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 6 & 4 & -2 \\ -6 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Домашнее задание 12

12.3. (**№ 10.1.**) Проверить, что оператор $\mathbf{P}$, задаваемый в $\mathbb{R}^n$ матрицей P, является оператором проектирования на некоторое подпространство F паралельно некоторому подпространству G, и построить проектор $\mathbf{Q}$ на подпространство G параллельно подпространству F :

$$P{\cdot}P \equiv P^2 = P \implies Q = I{-}P \implies Q{\cdot}Q \equiv Q^2 = Q \implies P{\cdot}Q = Q{\cdot}P = \theta.$$

Проверить, что

(a) $F = Ran\,P,\ G = Ker\,P \iff G = Ran\,Q,\ F = Ker\,Q$,
найдя предварительно подпространства F и G;

(b) справедливость разложения пространства в прямую сумму $\mathbb{R}^n = F \oplus G$;

(c) $\forall\, h \in \mathbb{R}^n \implies h = f + g,\ f \in F,\ g \in G \implies Ph = f,\ Qh = g$:

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -3 \\ -3 & -6 & 3 \\ -3 & -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

12.4. (**№ 10.2.**) Для диагонализируемого оператора $\mathbf{A}$, задаваемого матрицей A,

(a) найти собственные векторы $\{t_k\}$ и собственные значения $\{\lambda_k\}$ оператора $\mathbf{A}$;

(b) проверить непосредственно справедливость равенств $\mathbf{A}t_k = \lambda_k t_k$;

(c) найти матрицу перехода T к базису из собственных векторов и матрицу Λ оператора в нем;

(d) проверить непосредственно справедливость равенства $A = T\Lambda T^{-1}$;

(e) найти «косые» проекторы $\mathbf{P}_k$ на собственные подпространства параллельно сумме других и проверить, что $\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_j = \delta_i j \mathbf{P}_j$;

(f) проверить непосредственно «косое» разложение единицы $\mathbf{I} = \sum\limits_k \mathbf{P}_k$ и спектральное разложение оператора $\mathbf{A}$: $\quad \mathbf{A} = \sum\limits_k \lambda_k \mathbf{P}_k$;

(g) вычислить значение характеристического полинома $p_A(\mathbf{A})$ непосредственно и используя спектральное разложение:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 3 \\ 3 & 9 & -3 \\ 3 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

13. Унитарные и евклидовы пространства

13.1. Можно ли принять в данном пространстве E в качестве скалярного произведения функцию:

$\underline{E = \mathbb{R}^n}$ $\Longrightarrow$ **(a)** $(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$; **(b)** $(x,y) = \sum\limits_{k=2}^{m} x_k y_k$, $m < n$;

$\underline{E = \mathcal{P}_n}$ $\Longrightarrow$ **(a)** $(p,q) = \sum\limits_{k=1}^{n} p(x_k)q(y_k)$; **(b)** $(p,q) = \sum\limits_{k=2}^{n-1} p(x_k)q(y_k)$;

$\underline{E = \mathcal{P}_n[a,b]}$ $\Longrightarrow$ $(p,q) = \int\limits_a^b \rho(t)p(t)q(t)dt,$

$(\rho(t) > 0,\ \rho(t)$ – непрерывна на $[a,b]$)?

13.2. Записать неравенство треугольника и неравенство Коши – Буняковского для скалярных произведений из задачи 13.1.

13.3. Ортогонализировать базис $\{f\}$ в $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$:

(a) $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

(b) $f_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, f_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

13.4. Ортогонализировать базис $\{1, t, t^2\}$ в $\mathcal{P}_2[-1,1]$ со скалярным произведением

$$(p,q) = \int\limits_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

13.5. В пространстве тригонометрических полиномов $(a_k, b_k \in \mathbb{C},\ x \in [-\pi,\pi])$

$\mathbf{T}_{2n+1} = \{T(x) = a_n \cos nx + \ldots + a_1 \cos x + a_0 + b_1 \sin x + \ldots + b_n \sin nx\}$

со скалярным произведением $(T,S) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} T(x)\overline{S(x)}dx$ рассматривается

система функций $\{\cos nt, \ldots, \cos t, 1, \sin t, \ldots, \sin nt\}$.

Проверить, что указанная система функций образует ортогональный базис. Найти норму базисных векторов и построить ортонормированный базис.

Домашнее задание 13

13.6. (**№ 11.1.**) Можно ли принять в данном пространстве E в качестве скалярного произведения функцию:

$\underline{E = \mathbb{C}^n} \implies$ **(a)** $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k$; **(b)** $(x, y) = \sum\limits_{k=2}^{n} x_k y_k$;

$\underline{E = \mathcal{P}_n} \implies$ **(a)** $(p, q) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$; **(b)** $(p, q) = \sum\limits_{k=2}^{m} a_k b_k, m < n$;

$\underline{E = \mathcal{P}_n[a, b]} \implies (p, q) = \int\limits_a^b e^{-t} p(t) q(t) dt$?

13.7. (**№ 11.2.**) Записать неравенство треугольника и неравенство Коши – Буняковского для скалярных произведений из задачи 13.6.

13.8. (**№ 11.3.**) Ортогонализировать базис $\{f\}$ в $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$:

(a) $f_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$;

(b) $f_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, f_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

13.9. (**№ 11.4.**) Ортогонализировать базис $\{1, t, t^2\}$ в $\mathcal{P}_2[0, \infty)$ со скалярным произведением

$$(p, q) = \int\limits_0^\infty e^{-t} p(t) q(t) dt.$$

13.10. (**№ 11.5.**) В пространстве тригонометрических полиномов

$\mathbf{T}_{2n+1} = \{T(x) = a_n \cos nx + \ldots + a_1 \cos x + a_0 + b_1 \sin x + \ldots + b_n \sin nx\}$

со скалярным произведением $(T, S) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} T(x) \overline{S(x)} dx$ рассматривается

система функций $\{e^{-inx}, \ldots, e^{-x}, 1, e^{ix}, \ldots, e^{inx}\}, (a_k, b_k \in \mathbb{C},\ x \in [-\pi, \pi])$.

Проверить, что указанная система функций образует ортогональный базис. Найти норму базисных векторов и построить ортонормированный базис.

14. Спектральное разложение самосопряженного и унитарного оператора

14.1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & \sqrt{6} \\ -3 & 1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$:

(a) проверить самосопряженность матрицы A;

(b) показать, что оператор $\mathbf{A}$, действующий в унитарном пространстве $\mathbb{C}^n$ со скалярным произведением $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k$, задаваемый матрицей A, самосопряжен;

(c) найти собственные векторы $\{t_k\}$ и собственные значения $\{\lambda_k\}$ этого оператора;

(d) проверить, что его собственные значения вещественны;

(e) проверить, что его собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям $\lambda_i \neq \lambda_j$, ортогональны $t_i \perp t_j$;

(f) найти ортонормированный базис из собственных векторов $\{u_k\}$;

(g) построить матрицу перехода U к этому базису и проверить, что она унитарна;

(h) проверить непосредственно справедливость равенства $A = U \Lambda U^*$.

14.2. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1/4 & -3/4 & \sqrt{6}/4 \\ -3/4 & 1/4 & \sqrt{6}/4 \\ \sqrt{6}/4 & \sqrt{6}/4 & 1/2 \end{pmatrix}$:

(a) проверить унитарность матрицы A;

(b) показать, что оператор $\mathbf{A}$, действующий в унитарном пространстве $\mathbb{C}^n$ со скалярным произведением $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k$, задаваемый матрицей A, унитарен;

(c) найти собственные векторы $\{t_k\}$ и собственные значения $\{\lambda_k\}$ этого оператора;

(d) проверить, что его собственные значения по модулю равны единице;

(e) проверить, что его собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям $\lambda_i \neq \lambda_j$, ортогональны $t_i \perp t_j$;

(f) найти ортонормированный базис из собственных векторов $\{u_k\}$;

(g) построить матрицу перехода U к этому базису и проверить, что она унитарна;

(h) проверить непосредственно справедливость равенства $A = U\Lambda U^*$.

14.3. Показать, что в унитарном пространстве $\mathbf{T}_{2n+1}$ тригонометрических полиномов (см. задачи 13.5, 13.10) дифференциальный оператор

$$\mathbf{D}\boldsymbol{T} = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}T(x)$$

самосопряжен. Найти ортонормированный базис из собственных векторов.

14.4. Дано подпространство $S \subset \mathbf{V}_3$ («плоскость в пространстве»)

$$S = \{\vec{f} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \in \mathbb{V}_3 \quad | \quad x - y + \sqrt{2}z = 0\} :$$

(a) найти ортонормированные базисы $\{\vec{p}, \vec{q}\}$,$\{\vec{n}\}$ в подпространстве S и его ортогональном дополнении $L = S^{\perp}$;

(b) найти матрицы $P,\ Q$; $\widetilde{P},\ \widetilde{Q}$ операторов $\mathbf{P},\ \mathbf{Q}$ ортогонального проектирования (ортопроекторов) на подпространства $S,\ L$ в старом базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ и новом базисе $\{\vec{p}, \vec{q}, \vec{n}\}$;

(c) проверить, что

$$P = P^*, P^2 = P, \qquad Q = Q^*, Q^2 = Q,$$
$$I = P + Q, \qquad PQ = \theta;$$

(d) найти ортогональные проекции $\vec{g} \in S,\ \vec{h} \in L$ произвольного вектора $\vec{f} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \in \mathbf{V}_3$.

14.5. Для самосопряженного оператора $\mathbf{A}$, заданного в унитарном пространстве $\mathbb{C}^n$ с каноническим скалярным произведением (см. задачу 13.6.**a**) самосопряженной матрицей A из задачи 14.1,

(a) найти ортопроекторы $\mathbf{P}_k$ на собственные подпространства F_k и проверить, что

$$\mathbf{P}_k^* = \mathbf{P}_k, \quad \mathbf{P}_j \cdot \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_j = \delta_i j \mathbf{P}_j;$$

(b) проверить непосредственно разложение единицы $\mathbf{I} = \sum\limits_k \mathbf{P}_k$;

(c) проверить спектральное разложение самосопряженного оператора

$$\mathbf{A} = \sum_k \lambda_k \mathbf{P}_k.$$

14.6. Для унитарного оператора $\mathbf{A}$, заданного в унитарном пространстве $\mathbb{C}^n$ с каноническим скалярным произведением (см. задачу 13.6.**a**) унитарной матрицей A из задачи 14.2,

(a) найти ортопроекторы $\mathbf{P}_k$ на собственные подпространства F_k и проверить, что
$$\mathbf{P}_k^* = \mathbf{P}_k, \quad \mathbf{P}_j \cdot \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_j = \delta_i j \mathbf{P}_j;$$

(b) проверить непосредственно разложение единицы $\mathbf{I} = \sum\limits_k \mathbf{P}_k$;

(c) проверить спектральное разложение унитарного оператора $\mathbf{A} = \sum\limits_k \lambda_k \mathbf{P}_k$.

14.7. Построить спектральное разложение самосопряженного оператора (см. задачу 14.3)
$$\mathbf{D}\boldsymbol{T} = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}T(x).$$

Домашнее задание 14

14.8. (**№ 12.1(a).**) Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{3} & -2 \\ \sqrt{3} & -1 & -2\sqrt{3} \\ -2 & -2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$:

(a) проверить самосопряженность матрицы A;

(b) показать, что оператор $\mathbf{A}$, действующий в унитарном пространстве $\mathbb{C}^n$ со скалярным произведением $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k$, задаваемый матрицей A, самосопряжен;

(c) найти собственные векторы $\{t_k\}$ и собственные значения $\{\lambda_k\}$ этого оператора;

(d) проверить, что его собственные значения вещественны;

(e) проверить, что его собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям $\lambda_i \neq \lambda_j$, ортогональны $t_i \perp t_j$;

(f) найти ортонормированный базис из собственных векторов $\{u_k\}$;

(g) построить матрицу перехода U к этому базису и проверить, что она унитарна;

(h) проверить непосредственно справедливость равенства $A = U\Lambda U^*$.

14.9. (**№ 12.1(b).**) Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -3/4 & \sqrt{3}/4 & -1/2 \\ \sqrt{3}/4 & -1/4 & -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \end{pmatrix}$:

(a) проверить унитарность матрицы A;

(b) показать, что оператор $\mathbf{A}$, действующий в унитарном пространстве $\mathbb{C}^n$ со скалярным произведением $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k$, задаваемый матрицей A, унитарен;

(c) найти собственные векторы $\{t_k\}$ и собственные значения $\{\lambda_k\}$ этого оператора;

(d) проверить, что его собственные значения по модулю равны единице;

(e) проверить, что его собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям $\lambda_i \neq \lambda_j$, ортогональны $t_i \perp t_j$;

(f) найти ортонормированный базис из собственных векторов $\{u_k\}$;

(g) построить матрицу перехода U к этому базису и проверить, что она унитарна;

(h) проверить непосредственно справедливость равенства $A = U \Lambda U^*$.

14.10. (**№ 12.2.**) Показать, что в унитарном пространстве $\mathbf{T}_{2n+1}$ тригонометрических полиномов (см. задачи 13.5, 13.10) интегральный оператор

$$\mathbf{J}_k \boldsymbol{T} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-t)} T(t) dt,$$

$(k = 0, \pm 1, \ldots \pm n)$ самосопряжен. Найти ортонормированный базис из собственных векторов.

14.11. (**№ 13.1.**) Дано подпространство $S \subset \mathbf{V}_3$ («плоскость в пространстве»)

$$S = \{\vec{f} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \in \mathbf{V}_3 \quad | \quad \sqrt{6}x + \sqrt{6}y + 2z = 0\} :$$

(a) найти ортонормированные базисы $\{\vec{p}, \vec{q}\}$,$\{\vec{n}\}$ в подпространстве S и его ортогональном дополнении $L = S^{\perp}$;

(b) найти матрицы $P,\ Q;\ \widetilde{P},\ \widetilde{Q}$ операторов $\mathbf{P},\ \mathbf{Q}$ ортогонального проектирования (ортопроекторов) на подпространства $S,\ L$ в старом базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ и новом базисе $\{\vec{p}, \vec{q}, \vec{n}\}$;

(c) проверить, что

$$P = P^*, P^2 = P, \qquad Q = Q^*, Q^2 = Q,$$

$$I = P + Q, \qquad PQ = \theta;$$

(d) найти ортогональные проекции $\vec{g} \in S,\ \vec{h} \in L$ произвольного вектора $\vec{f} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \in \mathbf{V}_3$.

14.12. (**№ 13.2(a).**) Для самосопряженного оператора $\mathbf{A}$, заданного в унитарном пространстве $\mathbb{C}^n$ с каноническим скалярным произведением (см. задачу 13.6(**a**)) самосопряженной матрицей A из задачи 14.8,

(a) найти ортопроекторы $\mathbf{P}_k$ на собственные подпространства F_k и проверить, что
$$\mathbf{P}_k^* = \mathbf{P}_k, \quad \mathbf{P}_j \cdot \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_j = \delta_{ij}\mathbf{P}_j;$$

(b) проверить непосредственно разложение единицы $\mathbf{I} = \sum\limits_k \mathbf{P}_k$;

(c) проверить спектральное разложение самосопряженного оператора $\mathbf{A} = \sum\limits_k \lambda_k \mathbf{P}_k$.

14.13. (**№ 13.2(b).**) Для унитарного оператора $\mathbf{A}$, заданного в унитарном пространстве $\mathbb{C}^n$ с каноническим скалярным произведением (см. задачу 13.6(a)) унитарной матрицей A из задачи 14.9,

(a) найти ортопроекторы $\mathbf{P}_k$ на собственные подпространства F_k и проверить, что
$$\mathbf{P}_k^* = \mathbf{P}_k, \quad \mathbf{P}_j \cdot \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_j = \delta_{ij}\mathbf{P}_j;$$

(b) проверить непосредственно разложение единицы $\mathbf{I} = \sum\limits_k \mathbf{P}_k$;

(c) проверить спектральное разложение унитарного оператора $\mathbf{A} = \sum\limits_k \lambda_k \mathbf{P}_k$.

14.14. (**№ 13.3.**) Построить спектральное разложение самосопряженного оператора (см. задачу 14.10)

$$\mathbf{J}_k \boldsymbol{T} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-t)} T(t)dt, \quad (k = 0, \pm 1, \dots \pm n).$$

15. Квадратичные формы

15.1. Найти ортогональное преобразование $x = U\widetilde{x}$, приводящее квадратичную форму $K(x) = (Ax, x)$ к каноническому виду $(\Lambda\widetilde{x}, \widetilde{x})$:

(a) $K(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2\sqrt{2}x_1x_3 + 2\sqrt{2}x_2x_3$;

(b) $K(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2\sqrt{2}x_1x_3 + 2\sqrt{2}x_2x_3$.

15.2. Привести уравнения поверхностей второго порядка к каноническому виду и указать тип поверхностей:

(a) $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 2\sqrt{2}xz + 2\sqrt{2}yz = 1$;

(b) $3x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 2\sqrt{2}xz + 2\sqrt{2}yz = 0$.

15.3. Привести квадратичные формы из задачи 15.1 к каноническому виду методом Лагранжа. Найти соответствующее преобразование координат.

15.4. Выяснить с помощью критерия Сильвестра, являются ли квадратичные формы из задачи 15.1 знакоопределенными.

15.5. Найти экстремумы функций трех переменных:

(a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 2\sqrt{2}xz + 2\sqrt{2}yz$;

(b) $f(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 2\sqrt{2}xz + 2\sqrt{2}yz$.

Домашнее задание 15

15.6. (**№ 14.1.**) Найти ортогональное преобразование $x = U\widetilde{x}$, приводящее квадратичную форму $K(x) = (Ax, x)$ к каноническому виду $(\Lambda\widetilde{x}, \widetilde{x})$:

(a) $K(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + \sqrt{6}x_1x_3 + \sqrt{6}x_2x_3$;

(b) $K(x) = 3x_1^2 + x_2^2 - 2\sqrt{3}x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4\sqrt{3}x_2x_3$.

15.7. (**№ 14.2.**) Привести уравнения поверхностей второго порядка к каноническому виду и указать тип поверхностей:

(a) $2x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy + \sqrt{6}xz + \sqrt{6}yz = 1$;

(b) $3x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}xy + 4xz + 4\sqrt{3}yz = 0$.

15.8. (**№ 14.3.**) Привести квадратичные формы из задачи 15.6 к каноническому виду методом Лагранжа. Найти соответствующее преобразование координат.

15.9. (**№ 14.4.**) Выяснить с помощью критерия Сильвестра, являются ли квадратичные формы из задачи 15.6 знакоопределенными.

15.10. (**№ 14.5.**) Найти экстремумы функций трех переменных:

(a) $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy + \sqrt{6}xz + \sqrt{6}yz$;

(b) $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}xy + 4xz + 4\sqrt{3}yz$.

16. ИДЗ II

Задачи, вощедшие в ИДЗ I, отмечены $^\bullet$, необязательные задачи отмечены *.

16.1. Применяя метод Гаусса, найти

(a)$^\bullet$ базис и размерность линейной оболочки столбцов $Lin\{q_1, q_2, \ldots\}$ и строк $Lin\{p_1, p_2, \ldots\}$ матрицы A;

(b)$^\bullet$ $rang\ A$, базисные строки и столбцы;

(c) базис и размерность образа $Ran\ A$ и ядра $Ker\ A$ оператора $\mathbf{A}$, задаваемого матрицей A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & -2 & -6 & 5 \\ -3 & -2 & -3 & 1 & 0 & -9 \\ -3 & -3 & -3 & 0 & 0 & -6 \\ 2 & -3 & 2 & -5 & 0 & 19 \end{pmatrix}.$$

16.2. Применяя метод Гаусса, найти

(a)$^\bullet$ общее решение $x_{он}$ системы линейных неоднородных уравнений $Ax = b$;

(b)$^\bullet$ ранги матрицы системы A и расширенной матрицы системы $\overline{A} = (A\,|\,b)$;

(c)$^\bullet$ общее решение x_{oo} соответствующей однородной системы $Ax = 0$, базис и размерность подпространства ее решений L_0 ;

(d)$^\bullet$ частное решение $x_{чн}$ данной неоднородной системы;

(e)$^\bullet$ проверить непосредственно справедливость равенств $Ax_{oo} = 0,\ Ax_{чн} = b$:

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 - 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 0x_4 + 1x_5 = -4 \\ 1x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 0x_4 + 1x_5 = -3 \\ -3x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 4x_5 = -5 \end{cases}.$$

16.3. Применяя метод Гаусса, найти

(a)$^\bullet$ определитель $det\,A$;

(b) обратную матрицу A^{-1};

(c) проверить непосредственно справедливость равенств $A \cdot A^{-1} = I,\ A^{-1} \cdot A = I$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

16.4. Для диагонализируемого оператора $\mathbf{A}$, задаваемого матрицей A,

(a) найти собственные векторы $\{t_k\}$ и собственные значения $\{\lambda_k\}$ оператора $\mathbf{A}$;

(b) проверить непосредственно справедливость равенств $\mathbf{A}t_k = \lambda_k t_k$;

(c) найти матрицу перехода T к базису из собственных векторов и матрицу Λ оператора в нем;

(d) проверить непосредственно справедливость равенства $A = T\Lambda T^{-1}$;

(e)* найти «косые» проекторы $\mathbf{P}_k$ на собственные подпространства параллельно сумме других и проверить, что $\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_j = \delta_{ij}\mathbf{P}_j$;

(f)* проверить непосредственно «косое» разложение единицы $\mathbf{I} = \sum\limits_k \mathbf{P}_k$ и спектральное разложение оператора $\mathbf{A}$: $\quad \mathbf{A} = \sum\limits_k \lambda_k \mathbf{P}_k$;

(g)* вычислить значение характеристического полинома $p_A(\mathbf{A})$ непосредственно и используя спектральное разложение:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & 2 \\ 7 & -3 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

16.5. Для самосопряженного оператора $\mathbf{A}$, задаваемого матрицей A,

(a) найти собственные векторы $\{u_k\}$ и собственные значения $\{\lambda_k\}$ оператора $\mathbf{A}$;

(b) проверить непосредственно справедливость равенств $\mathbf{A}u_k = \lambda_k u_k$;

(c) найти матрицу перехода U к базису из собственных векторов и матрицу Λ оператора в нем, проверить, что $U \cdot U^* = U^* \cdot U = I$;

(d) проверить непосредственно справедливость равенства $A = U\Lambda U^*$;

(e)* построить ортопроекторы $\mathbf{P}_k$ на собственные подпространства и проверить, что $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^*, \quad \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_j = \delta_{ij}\,\mathbf{P}_j$;

(f)* проверить ортогональное разложение единицы $\mathbf{I} = \sum\limits_k \mathbf{P}_k$ и спектральное разложение оператора $\mathbf{A}$: $\quad \mathbf{A} = \sum\limits_k \lambda_k \mathbf{P}_k$;

(g) найти ортогональное преобразование $x = U\widetilde{x}$, приводящее квадратичную форму $K(x) = (Ax, x)$ к каноническому виду $K(\widetilde{x}) = (\Lambda\widetilde{x}, \widetilde{x})$;

(h)* выяснить характер стационарных точек квадратичной функции $K(x)$:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Список литературы

[1] Зиненко С. Н. Линейная алгебра: Учеб. пособие. – Х.: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2007. – 92 с.

[2] Зиненко С. Н. Индивидуальные задания по линейной алгебре. – Х.: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2007. – 60 с.

[3] Канатников А. Н., Крищенко А. П. Линейная алгебра: Учеб. для вузов / Под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. – 336 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. IV)

[4] Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра: Учеб. для вузов – 4-е изд. – М.: Физматлит, 1999. – 296 с.

[5] Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А. Линейная алгебра в вопросах и задачах: Учеб. пособие / Под ред. В. Ф. Бутузова. – 2-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2002. – 248 с.

[6] Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 2000. – 318 с.

[7] Беклемишев Д. В. Дополнительные главы линейной алгебры. – М.: Наука, 1983. – 337 с.

[8] Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1984. – 381 с.

[9] Сборник задач по алгебре: Учеб. для вузов / Под ред. А. И. Кострикина. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Физматлит, 2001. – 464 с.

[10] Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука, 1977. – 304 с.

[11] Глазман И. М., Любич Ю. И. Конечномерный линейный анализ. – М.: Наука, 1969. – 477 с.

[12] Кострикин А. И. Введение в алгебру. Ч. 2. Линейная алгебра. – М.: Физматлит, 2000. – 468 с.

[13] Курош А. Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975. – 431 с.

Вопросы к экзамену

1. Линейное пространство: определение, примеры $\mathbf{V}_3, \mathbb{R}^n, \mathcal{P}_n$. Простейшие следствия из аксиом линейного пространства.

2. Линейно независимые, полные системы векторов и их свойства. Связь между ними. Метод «прополки».

3. Базис, размерность, координаты. Примеры. Изоморфизм пространств.

4. Подпространства: определение, линейные оболочки, пересечение, сумма, формула Грассмана.

5. Матрицы и их ранг.

6. Определители и их свойства: определение, перестановки, общий вид n-линейного функционала, свойства.

7. Определители и их свойства: миноры, алгебраические дополнения. Теорема о базисном миноре.

8. Системы линейных уравнений: теорема Кронекера – Капелли, структура множества решений.

9. Связь определителей с линейной независимостью, с рангом, с системами линейных уравнений (формулы Крамера).

10. Линейные операторы: определение, общий вид, матрица оператора, умножение матрицы на вектор.

11. Действия над операторами и их матрицами: сложение, умножение на число, умножение между собой.

12. Ядро и образ линейного оператора.

13. Единичный и обратный оператор, теорема об обратном операторе.

14. Матрица перехода к новому базису. Связь между столбцами координат вектора, между матрицами оператора в разных базисах.

15. Определитель произведения матриц.

16. Инвариантное подпространство оператора. Матрица оператора в базисе из инвариантных подпространств.

17. Собственные векторы и собственные значения оператора: определение, характеристический полином, спектр.

18. Диагонализируемые операторы (теорема о собственных векторах с различными собственными значениями, собственное подпространство, матрица оператора в базисе из собственных векторов).

19. Проекторы. Теорема о проекторе. Разложение единицы. Спектральная теорема на языке проекторов.

20. Евклидово пространство: скалярное произведение, норма, метрика.

21. Ортогональные системы векторов: линейная независимость, ортонормированный базис, равенство Парсеваля, ортогональное дополнение. Ортогонализация Грама – Шмидта.

22. Нормальные операторы: спектральная теорема.

23. Сопряженный оператор. Сопряженная матрица. Связь между образом и ядром сопряженного оператора.

24. Самосопряженные операторы: свойства собственных значений и собственных векторов.

25. Унитарные операторы: свойства собственных значений и собственных векторов.

26. Теорема об унитарной матрице. Спектральная теорема на языке матриц.

27. Ортопроекторы. Теорема об ортопроекторе. Ортогональное разложение единицы. Спектральная теорема на языке ортопроекторов.

28. Линейный функционал: определение, сопряженное пространство, линейный функционал в евклидовом пространстве.

29. Билинейный функционал: определение, общий вид, симметричные функционалы, билинейные функционалы в евклидовом пространстве.

30. Квадратичные формы: определение, общий вид, матрица квадратичной формы, связь между матрицами в разных базисах, приведение квадратичной формы к каноническому виду.

31. Закон инерции квадратичных форм.

32. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

Вопросы «допуска»

1. Определение *линейно независимой* системы векторов в линейном пространстве L.
2. Определение *линейно зависимой* системы векторов в линейном пространстве L.
3. Определение *базиса* в линейном пространстве L.
4. Определение *размерности* линейного пространства L.
5. Определение *полной* системы векторов в линейном пространстве L.
6. Определение *ранга матрицы.*
7. *Теорема о разложении определителя по i-й строке.*
8. *Теорема Крамера.*
9. *Теорема Кронекера – Капелли.*
10. Определение *линейного оператора.*
11. Определение *ядра и образа линейного оператора.*
12. Определение *собственного вектора и собственного значения линейного оператора.*
13. Определение *характеристического многочлена и спектра линейного оператора.*
14. *Спектральную теорему для нормального оператора.*
15. *Критерий Сильвестра* положительно определенности квадратичной формы.

Типы матриц

Квадратная матрица $A = (a_{ij}), \quad i, j = 1, \ldots, n$, называется

верхнетреугольной,	если все ее элементы <u>под</u> главной диагональю равны нулю: $a_{ij} = 0$, при $i > j$.	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$
нижнетреугольной,	если все ее элементы <u>над</u> главной диагональю равны нулю: $a_{ij} = 0$, при $i < j$.	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$
симметрической,	если $A = A^T$, т. е. $a_{ij} = a_{ji}$.	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$
кососимметрической,	если $A = -A^T$, т. е. $a_{ij} = -a_{ji}$.	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ -a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$
вырожденной,	если $detA = 0$.	
невырожденной,	если $detA \neq 0$.	

Латинский алфавит

Написание	Произношение	Написание	Произношение
A a $A\ a$	а	N n $N\ n$	эн
B b $B\ b$	бэ	O o $O\ o$	о
C c $C\ c$	це	P p $P\ p$	пэ
D d $D\ d$	дэ	Q q $Q\ q$	ку
E e $E\ e$	е	R r $R\ r$	эр
F f $F\ f$	эф	S s $S\ s$	эс
G g $G\ g$	же	T t $T\ t$	тэ
H h $H\ h$	аш	U u $U\ u$	у
I i $I\ i$	и	V v $V\ v$	вэ
J j $J\ j$	йот	W w $W\ w$	дубль вэ
K k $K\ k$	ка	X x $X\ x$	икс
L l $L\ l$	эль	Y y $Y\ y$	игрек
M m $M\ m$	эм	Z z $Z\ z$	зэт

Греческий алфавит

Написание	Произношение	Написание	Произношение
A α	альфа	N ν	ню (ни)
B β	бета	Ξ ξ	кси
Γ γ	гамма	O o	омикрон
Δ δ	дельта	Π π	пи
E ε	эпсилон	P ρ	ро
Z ζ	дзета	Σ σ	сигма
H η	эта	T τ	тау
Θ θ (ϑ)	тэта	Υ υ	ипсилон
I ι	йота	Φ φ (ϕ)	фи
K κ	каппа	X χ	хи
Λ λ	лямбда	Ψ ψ	пси
M μ	мю (ми)	Ω ω	омега