

PACS: 47.53.+n
УДК 530.1

О математических и физических фракталах. III

А.В.Лымарь, В.В.Ульянов

*Харьковский национальный университет им. В.Н.Каразина
Украина, 61077, г. Харьков, пл. Свободы, 4
E-mail: Vladimir.V.Ulyanov@univer.kharkov.ua*

Обсуждается современное представление о фрактальных объектах и явлениях. Разработаны программы для компьютерных исследований некоторых математических и физических фракталов.

Обговорюється сучасне уявлення про фрактальні об'єкти та явища. Розроблено програми для комп'ютерних досліджень деяких математичних і фізичних фракталів.

The modern idea about fractal objects and phenomena is discussed. The programs of computer investigations for some mathematical and physical fractals have been worked out.

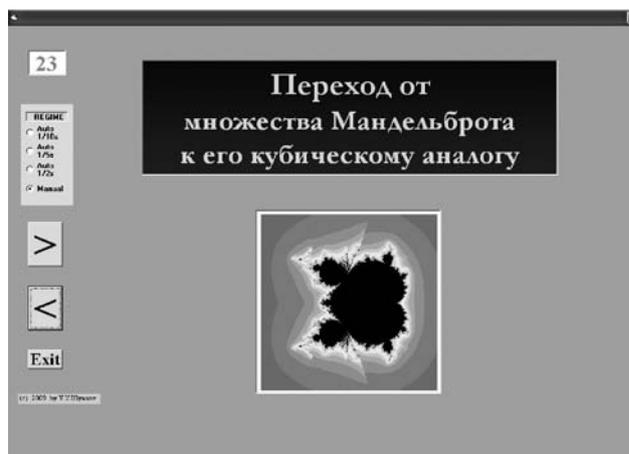
Данная статья является непосредственным развитием статей [1,2]. Здесь мы продолжаем изучение фрактальных объектов, являющихся обобщением канонических множеств Мандельброта (ММ) и Жюлиа (МЖ).

Анимационные исследования степенных аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа

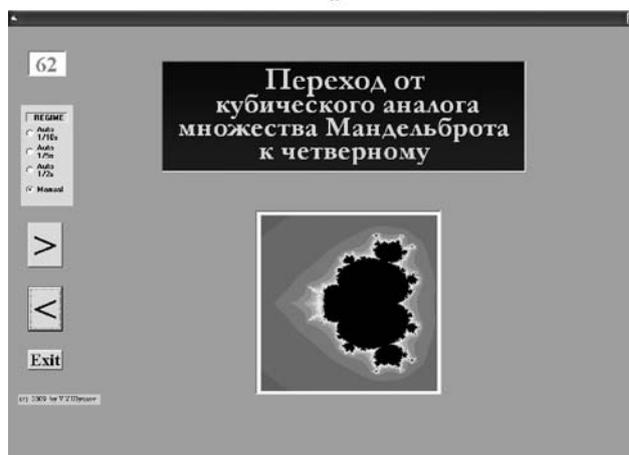
Предыдущая работа [2] была посвящена теоретическому рассмотрению степенных аналогов ММ и МЖ: даны определения, введен показатель степени K соответствующих отображений, приведены примеры, изучены общие особенности аналогов в сравнении с каноническими множествами. Было высказано пожелание наблюдать за этими аналогами в анимационных демонстрациях.

Здесь же мы сообщаем о практической стороне вопроса, о реализации высказанного пожелания об анимациях, о выполненных оригинальных компьютерных разработках для исследования указанных степенных аналогов ММ и МЖ, т. е. для проведения компьютерных экспериментов.

Чтобы проследить за деталями взаимопревращений степенных аналогов, нами созданы специальные компьютерные анимационные программы. В частности, появилась возможность проследить за тем, какие деформации претерпевают отдельные части основного тела ММ при непрерывном переходе от одного аналога к другому. Некоторые результаты отображены на



a



b

Рис. 1. Анимационный показ перехода от квадратичного ММ к его кубическому аналогу (а) и от кубического аналога ММ к четверному (b).

приводимых рисунках.

На рис. 1а показан общий вид экрана монитора при наблюдении за переходом от квадратичного (канонического) множества Мандельброта (ММ) к его кубическому аналогу, когда показатель степени K постепенно изменяется в области действительных значений $2 \leq K \leq 3$. В окошке слева вверху виден номер кадра (от 0 до 100). Под ним расположены

кнопки переключателя режима воспроизведения кадров с указанием числа кадров в секунду (от 10 до 2), а также кнопка ручного покадрового просмотра. Ниже располагаются кнопки выбора направления прокрутки анимации. В большом центральном окне демонстрируются картинка-кадры.

Зафиксирована типичная стадия указанного перехода (кадр 23): «клюв» (антенный отросток) канонической картины ММ раскрывается, превращаясь в верхний и нижний крупные кардиоидные наросты на кубическом аналоге ММ, имеющем 8-образную форму.

Аналогичным образом на рис.1б зафиксировано преобразование степенных аналогов ММ в области значений $3 \leq K \leq 4$ (кадр 63). В данном случае из середины основного тела множества слева возникает еще один нарост. Четверной аналог ММ постепенно приобретает треугольную структуру, а наросты из кардиоидных превращаются в формирования из трех кругов.

Вторая серия наших анимационных компьютерных разработок посвящена изучению отдельных степенных аналогов ММ и МЖ.

На рис. 2а видим компьютерный стенд для анимационной демонстрации в случае кубического аналога ММ ($K = 3$). Есть возможность при плавном изменении масштаба совершить «путешествия в

глубины» ММ в окрестностях отдельных точек комплексной плоскости, где таятся интересные картины ММ. На экране монитора в левом окошке видно характерное 8-образное основное тело кубического аналога ММ, состоящее из двух расплюснутых кругов с кардиоидными наростами вверху и внизу. Все это в огрубленном приближении, поскольку граница ММ не является резкой. Она явно фрактальна даже при малом увеличении, содержит многочисленные наросты-бородавки различной величины с усиками-антеннами, и даже незначительное увеличение позволяет увидеть исключительную изрезанность границы. Подобные основному телу фигурки встречаются в разных ответвлениях ММ, хотя они часто имеют несколько искаженную форму. Главное же тело симметрично относительно горизонтальной и вертикальной осей, поэтому при его исследовании достаточно рассматривать только одну

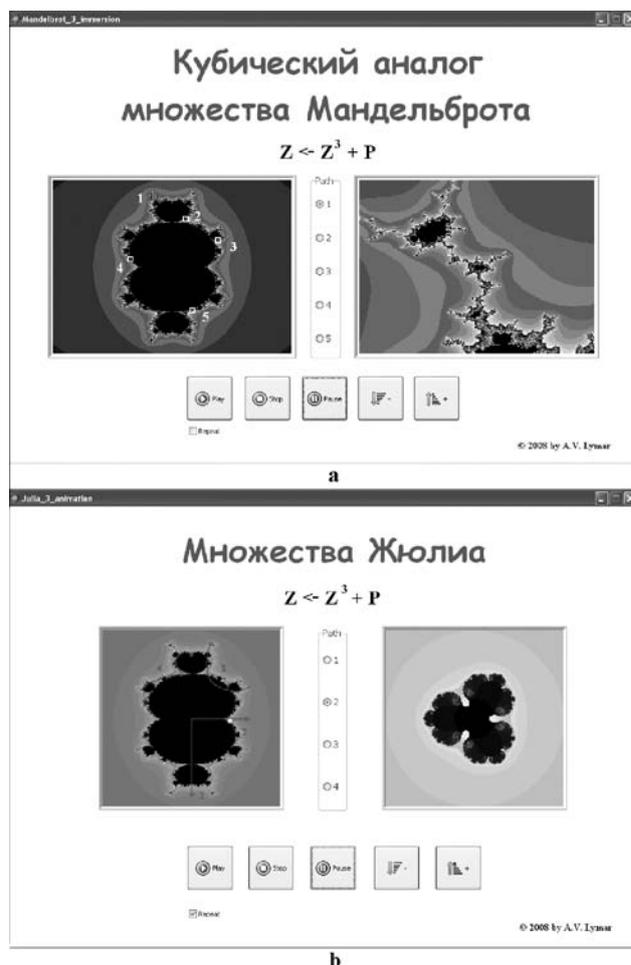


Рис. 2. Анимационные путешествия в глубины кубического аналога ММ (а) и вдоль некоторых траекторий с демонстрацией соответствующих множеств Жюлиа (б).

четверть.

Помимо кардиоид, вдоль всей границы множества встречаются подобия основного тела. С помощью увеличения можно обнаружить и другие характерные формы: дендриты, спирали и др. Хотя на некоторых изображениях может показаться, что кубическое отображение состоит из нескольких отдельных частей, при более подробном рассмотрении видно, что эти части соединены между собой тонкими нитями (дендритами). Это свидетельствует о том, что кубическое отображение (как и каноническое множество Мандельброта) является связным множеством.

На основном теле ММ указаны 5 выделенных прямоугольниками областей, которые можно выбирать с помощью переключателя в центре экрана. Они расположены так, чтобы наиболее полно показать те особенности этого множества, которые определяют его как фрактал. А именно: самоподобие и изрезанность границ. Координаты этих точек комплексной плоскости таковы: $-0.243+i 1.23$; $-0.529+i 0.0901$; $0.247-i 0.758$; $0.178+i 0.839$; $0.559+i 0.449$. Эти области показаны белыми квадратиками в левом окошке экрана. Переключение между точками осуществляется при

помощи панели Path. В правом окошке демонстрируется соответствующий мультфильм о «нырянии» в выбранную область. Управление осуществляется при помощи пяти кнопок, расположенных в нижней части экрана. Play – запускает просмотр, Stop – его останавливает, а Pause приостанавливает просмотр в заинтересовавшем месте. Кнопками «+» и «-» можно увеличивать или уменьшать (соответственно) скорость анимации. Выбрав Repeat, просматриваем выбранный путь несколько раз без остановок.

Дополнительная анимационная программа позволяет совершить увлекательные путешествия вдоль границы основного тела кубического аналога ММ на некоторой «глубине», чтобы наблюдать за причудливыми фрактальными структурами. При этом можно выбрать с помощью кнопок переключателя один из предлагаемых маршрутов и направлений на них.

Еще одна анимационная разработка представлена на рис. 2b. В правом окошке наблюдаются соответствующие аналоги множества Жюлиа для предлагаемых на выбор четырех маршрутов продвижения по точкам кубического аналога ММ, показанного в левом окошке. Как уже отмечалось, в этом случае каждой точке комплексной плоскости ММ соответствует некоторое множество Жюлиа. Таким образом, путешествие позволяет познакомиться с различными видами МЖ и переходами от однокомпонентных к многокомпонентным их структурам в виде облака изолированных фрагментов.

Были выбраны четыре пути на кубическом отображении в левом окошке экрана. Белая точка показывает конкретное место на комплексной плоскости в данный момент. В правом окошке можно увидеть множество Жюлиа, которое соответствует этой точке. Если она принадлежит аналогу множества Мандельброта, то соответствующее множество Жюлиа будет связным, а если же не принадлежит, то множество Жюлиа становится несвязным – так называемая «пыль Фату».

Заключительные замечания

Помимо анимационных разработок, нами созданы программы для изучения многообразия множеств Жюлиа (МЖ) для данного аналога множества Мандельброта (ММ) в виде двумерных серий картин.

Так, на рис. 3 показаны виды множеств Жюлиа для степенного аналога ММ с показателем степени $K=5$ в центральной части наблюдаются характерные картинки связных множеств МЖ, соответствующих основному телу ММ. Центральной точке ММ соответствует МЖ в виде круга (как и у всех других аналогов), около которого сосредоточены размытые многоугольники, в которых количество углов равно показателю степени K (в данном случае в виде структур, подобных пятиконечным звездам). На периферии, за пределами

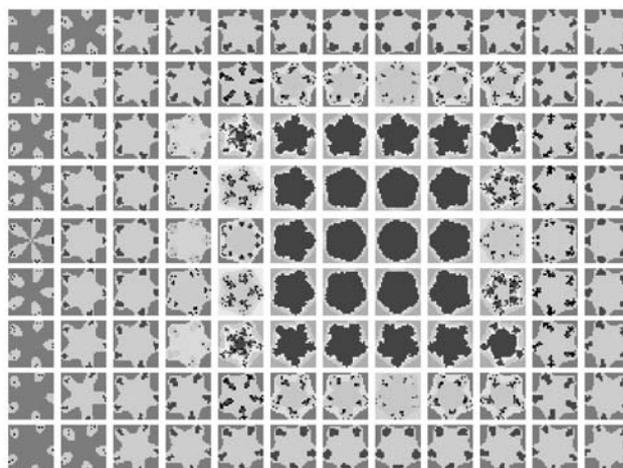


Рис. 3. Некоторые множества Жюлиа для пятерного отображения.

основного тела ММ, наблюдается переход к несвязным множествам (пыли Фату).

Как показали наши исследования, степенные аналоги ММ и МЖ, существенно отличаясь по форме от канонических ММ и МЖ, во многом наследуют их общие фрактальные свойства.

Более подробно основные результаты по теме степенных аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа предполагается изложить в готовящейся к изданию второй части монографии [3] с приложением наших компьютерных программ в явном виде.

Подчеркнем, что существенной частью нашей работы являются компьютерные разработки, созданные для исследования описываемых фракталов.

Еще и еще раз приходится сожалеть, что пока журнальные статьи не предусматривают возможности сопровождения текстов и иллюстраций компьютерными программами, так что приходится ограничиваться рассказом об их действии и описанием результатов наблюдений. К тому же возможности журнальной публикации ограничены монохромными рисунками.

Благодарим А.М.Ермолаева за интерес к нашей работе и неизменную поддержку.

1. Е.Н.Синельник, В.В.Ульянов, Вестник ХНУ, 739, сер. «Физика», в. 9, 50 (2006).
2. А.В.Лымарь, В.В.Ульянов, Вестник ХНУ, 821, сер. «Физика», в. 11, 24 (2008).
3. Е.Н.Синельник, В.В.Ульянов, Фракталы: от математики к физике, ХНУ им. В.Н.Каразина, Харьков (2005).