Вісник ХНУ, № 914, серія «Фізика», вип. 13, 2010. с.36 – 39

УДК 530.12:531.51:539.121.42
PACS 42.25. Ja

Прецессия спина фотонов и геометрические фазы

Е.Е. Занимонский[1], Ю.П. Степановский[2]

[1]Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,
Харьков-077, пл. Свободы, 4, 61077, Украина
[2]Институт теоретической физики имени А. И. Ахиезера
Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»,
Харьков-108, ул. Академическая, 1, 61108, Украина

В статье обсуждается волновая функция и волновое уравнение фотона в вакууме и обобщение на случай движения фотона в материальной среде или во внешнем гравитационном поле, а также прецессия спина фотонов при их движении в среде или во внешнем поле как проявление геометрической фазы Рытова-Владимирского-Берри.
Ключевые слова: волновая функция, геометрическая фаза, поляризация света.

В статті дискутується волнова функція та волнове рівняння фотону у вакуумі і узагальнення на випадок руху фотону в матеріальному середовищі або у зовнішньому гравітаційному полі, а також прецесія спіну фотонів якщо вони рухаються в середовищі або у зовнішньому полі як вияв геометрічної фази Ритова-Володинирського-Беррі.
Ключові слова: волнова функція, геометрична фаза, полярізація світла.

The wave function and wave equation of photon in vacuum as well their generalization for the case of photon motion in the media or external gravitational are discussed. It is shown that the method of Rytov-Vladimirsky-Berry geometrical phase is very useful for consideration of spin precession of photons moving in external fields or in the media.
Keywords: wave function, geometrical phase, polarization of light.

Вопрос о существовании волновой функции фотона остается актуальным вопросом квантовой оптики [1-4]. С трудностями при введении волновой функции светового кванта впервые столкнулись Л.Ландау и Р.Пайерлс в 1930 г. [5]. Они, правильно считая, что волновая функция светового кванта должна быть трехмерным комплексным вектором, не смогли написать соответствующее волновое уравнение и не смогли найти выражение для плотности вероятности фотона. В действительности волновое уравнение фотона легко находится, если отказаться от требования положительности энергии, принимаемого Ландау и Пайерлсом. Что же касается плотности вероятности, то, она существует только в случаях, когда безмассовое поле обладает спинами 0 и 1/2 [6].

Квантово-механическая природа уравнений Максвелла и их связь с волновым уравнением фотона впервые была установлена Э. Майораной в 1928-1932 гг. в работе, результаты которой, к сожалению, были опубликованы намного позже [7]. Формально, уравнения Максвелла в вакууме и волновое уравнение фотона (правополяризованного или левополяризованного) совпадают, но связь между волновым уравнением фотона и уравнениями Максвелла не так проста. Многолетняя деятельность по установлению и разъяснению этой связи, столь важной для квантовой оптики, была недавно удостоена Нобе-левской премии по физике (Р. Дж. Глаубер, 2005 г. [8]).

В работе обсуждается вопрос о волновой функции и волновом уравнении фотона в вакууме, обобщение волнового уравнения фотона на случай движения фотона в материальной среде, в частности, в метаматериалах или во внешнем гравитационном поле (проявляющемся как материальная среда), а также прецессия спина фотонов при их движении в среде или во внешнем поле как проявление геометрической фазы Рытова-Владимирского-Берри [9].

Волновая функция и волновое уравнение фотона в вакууме

Еще в 1907 г. польский физик Л.Зильберштейн установил [10], что уравнения Максвелла в вакууме

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = rot\vec{H}\,,\ \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -rot\vec{E}\,,\ div\vec{E} = 0\,,$$

$$div\vec{H} = 0 \qquad (1)$$

могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{i}{c}\frac{\partial \vec{\psi}_{\pm}}{\partial t} = \pm rot \vec{\psi}_{\pm} \qquad (2a)$$

$$div \vec{\psi}_{\pm} = 0\,, \qquad (2b)$$

где

$$\vec{\psi}_{\pm} = \vec{E} \pm i\vec{H}$$

Следует отметить, что уравнение (2a) само по себе не релятивистски инвариантно, оно становится таким только при условии выполнения соотношения (2b).

Э.Майорана [7] первым увидел в уравнении (2a) волновое уравнение

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi\,,$$

с простым гамильтонианом $H = \pm\hbar c rot = \pm\left(\vec{S}\,\vec{p}\right)c$, где $\vec{S}$ – оператор спина фотона, $\vec{p} = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \vec{x}}$ – оператор импульса фотона, знаки + и – соответствуют правополяризованному (R) и левополяризованному (L) фотонам.

Итак, фотонам в правом и левом состояниях поляризации соответствуют разные волновые функции, обозначим их $\vec{\psi}_R$ и $\vec{\psi}_L$. Фотон может находиться также в состоянии с эллиптической поляризацией, $\vec{\psi}_R$ и $\vec{\psi}_L$ одновременно отличны от нуля. Введем теперь новые комплексные поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$:

$$\vec{E} = \vec{\psi}_R + \vec{\psi}_L\,,\ \vec{H} = -i\left(\vec{\psi}_R - \vec{\psi}_L\right)$$

Как нетрудно убедиться, эти комплексные поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ удовлетворяют обычным уравнениям Максвелла (1) и именно эти уравнения нужно считать волновыми уравнениями фотона, а комплексные поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ – волновой функцией фотона.

Отметим, что волновые уравнения для правополяризованных и левополяризованных фотонов (фотонов с правой и левой спиральностью) являются частными представителями общего случая волновых уравнений для безмассовых частиц с произвольным спином и определенной спиральностью

$$\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\vec{S}\right)\right]\psi_{\lambda} = 0\,, \qquad (3)$$

где λ – спиральность частицы ($\lambda = \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \pm 2, \ldots$), а $\vec{S}$ – спиновые матрицы соответствующего спина. Уравнения (3) представляют собой релятивистски инвариантные уравнения только в случае спина 1/2, а в общем случае, как в случае фотонов, должны быть дополнены еще некоторыми дополнительными уравнениями (подробнее [10, 11]).

Волновая функция и волновое уравнение фотона в гиротропной макроскопической среде

Рассмотрим макроскопическую среду в случае, когда изменением диэлектрической проницаемости ε и магнитной проницаемости μ на расстояниях порядка длины волны фотона можно пренебречь. Введем комплексные функции

$$\vec{\psi}_{\pm} = \sqrt{\varepsilon}\vec{E} \pm i\sqrt{\mu}\vec{H}\,.$$

Эти функции удовлетворяют уравнениям, аналогичным уравнениям (2a) и (2b):

$$\frac{i}{c}\frac{\partial \vec{\psi}_{\pm}}{\partial t} = \pm\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} rot\,\vec{\psi}_{\pm} - i\left[rot\,\vec{g}\,\vec{\psi}_{\pm}\right], \qquad (4a)$$

$$div \vec{\psi}_{\pm} = \pm i\sqrt{\mu\varepsilon}\left(rot\,\vec{g}\,\vec{\psi}_{\pm}\right) \qquad (4b)$$

где второе слагаемое в (4a) учитывает гиротропию среды, описываемую вектором $\vec{g}$ [12].

Эти уравнения и следует считать волновыми уравнениями фотонов в среде.

В случае, когда ε и μ резко изменяющиеся функции координат и времени, нельзя получить такие простые уравнения как (4a) и (4b), а получились бы уравнения с дополнительными членами, которые «перепутывали» бы правую и левую спиральности фотонов, что означало бы возможность изменения спиральности фотона при его движении в среде. Однако, в реальных средах, кроме искусственных метаматериалов, этими изменениями можно пренебречь. При прохождении фотонов через границу двух сред или их отражении круговая поляризация может превратиться в эллиптическую. В средах же с непрерывным изменением ε и μ спиральность фотона является инвариантом (адиабатическим инвариантом).

Прецессия вектора поляризации и геометрические фазы

При движении фотона с круговой поляризацией в среде его волновая функция приобретает фазу, которая, как показал М.Берри в 1984 г., обладает замечательными геометрическими свойствами. Фаза, приобретаемая фотоном при движении по замкнутой траектории в импульсном пространстве определяется исключительно геометрическими свойствами траектории. Геометрическая природа этой фазы и ее проявление во вращении плоскости поляризации света была задолго до М.Берри обнаружены С.М.Рытовым в 1938 г. и В.В.Владимирским в 1941 г., в связи с чем эту фазу называют фазой Рытова-Владимирского-Берри [9].

Рассмотрим волновую функцию фотона с линейной поляризацией как суперпозицию волновых функций с круговой поляризацией:

$$\vec{\psi} = \vec{e}\, e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{e}_{+} + \vec{e}_{-}\right) e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega t} \qquad (5)$$

где $e^2 = 1$, $\left|e_{\pm}\right|^2 = 1$, $e_{\pm}{}^2 = 0$.

При движении фотона два слагаемых в формуле (5) приобретают фазы противоположных знаков, что приводит к вращению вещественного вектора $\vec{e}$.

$$\vec{\psi}' = \vec{e}'\, e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{i\chi}\vec{e}_{+} + e^{-i\chi}\vec{e}_{-}\right) e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega t}$$

Вектор $\vec{e}$ повернется на угол χ по часовой стрелке, если смотреть вдоль волнового вектора $\vec{k}$.

Формула для поворота плоскости поляризации света, полученная Рытовым, геометрически проинтерпретированная Владимирским и переоткрытая Берри, может быть легко получена с помощью следующего элементарного рассуждения. (Чтобы не преуменьшать заслуги М. Берри в данном вопросе, нужно отметить, что он первый осознал важность аналогичной фазы - фазы Бери, не только в квантовой оптике, но и вообще в квантовой механике.) Пусть линейно поляризованный луч света описывает некоторую траекторию в прозрачной среде, например, в оптическом волокне. Пусть при этом не происходит деполяризации света, а поляризация остается линейной. Тогда мы можем написать два соотношения:

$$\vec{e}^{\,2} = 1,\ \left(\vec{e}\vec{n}\right) = 0\,. \qquad (6)$$

Второе соотношение говорит о том, что вектор поляризации $\vec{e}$ ортогонален к единичному вектору, направленному вдоль касательной к траектории луча. Мы пренебрегли правой частью уравнения (4b) ввиду ее малости. Дифференцируя соотношения (6) по времени, получим:

$$\left(\vec{e}\dot{\vec{e}}\right) = 0\,, \quad \left(\dot{\vec{e}}\vec{n}\right) + \left(\vec{e}\dot{\vec{n}}\right) = 0\,. \qquad (7)$$

Вектор $\dot{\vec{e}}$ ортогонален к вектору $\vec{e}$ и может быть разложен по полному набору ортогональных к $\vec{e}$ векторов,

$$\dot{\vec{e}} = \alpha\vec{n} + \beta\left[\vec{n}\vec{e}\right]$$

Коэффициент α мы легко находим, используя соотношения (7). Второе слагаемое обращается в нуль, если среда негиротропна и вектор $\vec{e}$ не вращается вокруг направления движения фотона. Но это не так в рассматриваемом нами случае, и коэффициент β можно найти, используя уравнения (4a). В результате получим

$$\dot{\vec{e}} = -\left(\vec{e}\dot{\vec{n}}\right)\vec{n} - c\left(\vec{n}\,rot\,\vec{g}\right)\left[\vec{n}\vec{e}\right]. \quad (8)$$

Первое слагаемое в (8) (закон Рытова) говорит о том, что в случае негиротропой среды изменение вектора поляризации фотона определяется исключительно его траекторией. Формула (14) может быть записана также в виде

$$\dot{\vec{e}} = \left[\vec{\omega}\vec{e}\right],$$

где угловая скорость вращения вектора поляризации

$$\vec{\omega} = \left[\vec{n}\dot{\vec{n}}\right] - c\left(\vec{n}\,rot\,\vec{g}\right)\vec{n}\,. \qquad (9)$$

Вращение плоскости поляризации света при его распространении в гравитационном поле и формула Рытова-Владимирского-Берри

Рассчитывая отклонение луча света в гравитационном поле Солнца в 1911 и в 1915 годах, А.Эйнштейн учитывал влияние гравитационного поля, как существование вокруг Солнца некоторой прозрачной среды с диэлектрической проницаемостью, зависящей от координат. Несмотря на малость эффекта отклонения и небольшую точность эксперимента, подтверждение эффекта в 1919 г. было триумфом общей теории относительности Эйнштейна (на сегодняшний день эффект Эйнштейна подтвержден с точностью 0,02%). В настоящее время понимание того, как свет распространяется в гравитационном поле приобрело особую актуальность, благодаря созданию и повсеместному использованию глобальных навигационных спутниковых систем, которые без использования теории Эйнштейна давали бы ошибки в несколько километров.

Представляет интерес исследование влияния гравитационного поля как некоторой макроскопической среды на вращение плоскости поляризации светового луча. Впервые этот вопрос был рассмотрен в 1957 и в 1960 годах [12, 13]. В обеих статьях уравнения Максвелла в общей теории относительности трактовались как «электродинамика в макроскопической среде». В этих работах распространение поляризованных электромагнитных волн в гравитационных полях было впервые подвергнуто серьезному и глубокому исследованию.

Используя метод геометрических фаз [14], мы рассмотрели (в квазиклассическом приближении) задачу об общерелятивистской прецессии спина для случая безмассовой частицы произвольного спина и получили при этом простое выражение для вращения вектора поляризации фотона, распространяющегося в гравитационном поле как обобщение известной формулы Рытова-Владимирского-Берри.

В статье [14] был рассмотрен случай движения фотона в гравитационном поле произвольной интенсивности и структуры. В настоящей работе мы применим метод геометрической фазы к случаю слабого гравитационного поля вращающейся тяготеющей массы. В этом случае вектор $\vec{n}$ удовлетворяет следующему уравнению

$$\dot{\vec{n}} = -\frac{G}{c^2 r^3} 2M\ c\left[\vec{r} - (\vec{r}\vec{n})\vec{n}\right] + c\left[\vec{n}\, rot\, \vec{g}\right] =$$

$$= -\frac{G}{c\, r^3}\left\{\begin{array}{l} 2M\left[\vec{r} - (\vec{r}\vec{n})\vec{n}\right] + \frac{1}{2}\left[\vec{M}\vec{n}\right] - \\ -\frac{3}{2r^2}\left[\vec{r}\vec{n}\right]\left(\vec{r}\vec{M}\right) \end{array}\right\} \qquad (10)$$

где G – ньютоновская постоянная, M – масса вращающегося тела, $\vec{M}$ – вращательный момент тела, а вектор $\vec{g}$, определяющий гиротропию среды, равен [12]

$$\vec{g} = \frac{G}{2c^2 r^3}\left[\vec{M}\vec{r}\right]$$

Отметим, что именно множитель 2 перед *Mc* в (10) ответственен за триумф теории Эйнштейна в 1919 г. Он говорит о том, что луч света в поле Солнца отклоняется на угол, который в 2 раза больше угла, получаемого по теории Ньютона.

Таким образом, угловая скорость вращения вектора поляризации фотона, согласно (9), равна

$$\vec{\omega} = \frac{G}{c\, r^3} 2M\left[\vec{r}\,\vec{n}\right] - rot\,\vec{g} =$$

$$= \frac{G}{c\, r^3}\left\{2M\left[\vec{r}\vec{n}\right] - \frac{1}{2}\vec{M} + \frac{3}{2r^2}\vec{r}\left(\vec{r}\vec{M}\right)\right\}$$

что полностью согласуется с результатами статьи [12], полученными с помощью намного более сложных расчетов.

Заключение

Метод геометрической фазы Рытова-Владимирского-Берри эффективно работает при расчете вращения плоскости поляризации света, распространяющегося в гравитационном поле вращающейся тяготеющей массы. При этом метод топологической фазы должен быть дополнен учетом негиротропности макроскопической среды, соответствующей гравитационному полю вращающейся массы.

1. Bialynicki-Birula I. The Photon Wave Function, in: Coherence and Quantum Optics VII, Eds. Eberly J.H, Mandel L., Wolf E. – New York: Plenum, (1996), P. 313-323.
2. Bialynicki-Birula I. Photon Wave Function, in: Progress in Optics, Vol. 36, Ed. Wolf E. – Amsterdam: Elsevier, (1996), p. 245-290.
3. Bialynicki-Birula I. Photon as a quantum particle, Acta Physica Polonica 37B, (2006), P. 935-946.
4. Степановский Ю.П. О волновой механике световых квантов и соотношениях неопределенности в квантовой электродинамике, В кн.: Проблемы современной физики (ред. Н.Ф. Шульга). Харьков: ННЦ ХФТИ, (2008), С. 317-366.
5. Landau L., Peierls R. On quantum electrodynamics in configurational space, Zs. Phys. 62, (1930), P. 188-198.
6. Weinberg S., Witten E. Limits on massless particles, Phys. Lett. (1980). V. B 96. P. 59-62.
7. Mignani R., Recami E., Baldo M. About a Dirac-like equation for the photon according to Ettore Majorana, Lett. al Nuovo Cim. (1974), V. 11, N.12 P. 568-569.
8. Глаубер Р. Дж. Сто лет квантам света, УФН (2006), Т. 176, №12. С. 1342-1352.
9. Виницкий С. И., Дербов В. Л., Дубовик В. М., Марковски Б., Степановский Ю. П. Топологические фазы в квантовой механике и поляризационной оптике, УФН, Т.160, Вып. 6, (1990), С. 1-49.
10. Степановский Ю.П. О волновых уравнениях безмассовых полей, ТМФ. (1981), Т. 47, № 3. С. 343-351.
11. Степановский Ю.П. От уравнений Максвелла до фазы Берри и сонолюминесценции: проблемы теории электромагнитного и других безмассовых полей, Электромагнитные явления. (1998), Т. 1, № 2. С.180-219.
12. Скроцкий Г.В. О влиянии силы тяжести на распространение света, ДАН СССР. (1957), Т. 114, № 1. С. 73-76.
13. Plebansky J. Electromagnetic waves in gravitational fields, Phys. Rev. 118, (1960), P. 1396-1408.
14. Занимонский Е.Е, Степановский Ю.П. Общерелятивистская прецессия спина как проявление геометрической фазы Рытова-Владимирского-Берри., Вісник ХНУ (2007), № 777. серія фізична «Ядра, частинки, поля», Вип 2 /34/,С. 51-55.