Вісник ХНУ, № 915, серія «Фізика», вип. 14, 2010. с.5 – 10

УДК 531.19
PACS 74.20 – z, 74.20. Fg

К теории сверхпроводимости электронного газа на поверхности нанотрубки

А.М. Ермолаев, С.В. Кофанов, Г.И. Рашба

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,
Украина, 61077, г. Харьков, пл. Свободы 4
E-mail: svkofanov@gmail.com

Рассматривается возможность существования сверхпроводимости электронного газа на поверхности нанотрубки. В модели БКШ методами Боголюбова, Горькова, Келдыша получено уравнение для энергетической щели в спектре возбуждений сверхпроводника. Численные расчеты величины щели выполнены для параметров углеродной нанотрубки.
Ключевые слова: нанотрубка, сверхпроводимость, энергетическая щель.

Розглядається можливість існування надпровідності електронного газу на поверхні нанотрубки. В моделі БКШ методами Боголюбова, Горькова, Кєлдиша отримано рівняння для енергетичної щілини у спектрі збуджень надпровідника. Числові розрахунки величини щілини виконані для параметрів вуглецевої нанотрубки.
Ключові слова: нанотрубка, надпровідність, енергетична щілина.

Discussed the capability of the electron gas superconductive state existence on the nanotube’s surface. The equation of the forbidden gap was obtained by means of Bogolubov, Gor’kov, Keldish methods according to Bardeen-Cooper-Schrieffer theory. In our numerical calculations we used the parameters of the carbon nanotube.
Keywords: nanotube, superconductivity, energy gap.

Введение

После открытия систем с двумерным электронным газом резко возрос интерес к сверхпроводимости квазидвумерных систем [1]. В 1964 году появилась статья Гинзбурга и Киржница [2], посвященная, в частности, сверхпроводимости квазидвумерного электронного газа. Они отметили, что как угодно слабое притяжение электронов в двумерном электронном газе способно образовать куперовские пары и оценили величину энергетической щели в спектре возбуждений такой системы. В работе [3] свойства квазидвумерных проводников изучались с использованием функциональных интегралов. Авторы этой работы нашли параметр порядка и химический потенциал металлической квазидвумерной системы в зависимости от температуры, напряженности внешнего магнитного поля и плотности электронов. «Квазидвумерность» использовалась ими для «ослабления» флуктуаций параметра порядка, разрушающих сверхпроводимость строго двумерных систем. Различные механизмы куперовского спаривания электронов (фононный, плазмонный) в двумерном электронном газе в инверсионных слоях в структурах «металл – диэлектрик – полупроводник» и гетероструктурах при наличии квантующего магнитного поля изучались в работе [4].

После открытия углеродных и полупроводниковых нанотрубок [5,6] возник вопрос о возможности существования сверхпроводящей фазы электронного газа на поверхности трубки. Интерес к этой проблеме обусловлен существованием нового параметра – кривизны трубки, который позволяет увеличить число способов управлять ее свойствами. В работе [7] экспериментально обнаружена сверхпроводимость пучков углеродных нанотрубок. Один из этих пучков состоял из 350 параллельных трубок диаметром 1,4 *нм* каждая и длиной 1 *мкм*. Расстояние между трубками в пучке достигало 0,2 *нм*. Авторы работы [7] обнаружили резкое падение электросопротивления пучка при температуре T_c=0,37 К. Сверхпроводимость пучка подавлялась поперечным магнитным полем 1,35 *Т*. Теория этого явления в продольном магнитном поле предложена в работе [8]. К сожалению, в работе [8] отсутствуют численные оценки величины щели. Здесь устраняется этот пробел и показывается, как уравнение для щели выводится методом Горькова и с использованием формализма Келдыша и функциональных интегралов.

Теория Боголюбова – Эминова – Сезонова

Естественным базисом для описания электронного газа на поверхности нанотрубки являются цилиндрические гармоники

$$\Psi_{mk}(\varphi,z)=\frac{1}{\sqrt{S}}e^{i(m\varphi+kz)}, \tag{1}$$

где φ и z – цилиндрические координаты, $m=0,\pm1,\ldots$ – азимутальное квантовое число, $\hbar k$ – проекция импульса электрона на ось z трубки, $S=2\pi aL$ – площадь поверхности трубки радиуса a и длины L. Гамильтониан электронов в базисе (1) в отсутствии магнитного поля равен

$$\begin{gathered}\hat{H}=\sum_{mk\sigma}\varepsilon_{mk}\hat{a}^+_{mk\sigma}\hat{a}_{mk\sigma}+\frac{1}{2S}\sum_{\sigma_1\sigma_2}\sum_{m_1m_2k_1k_2mq}\upsilon_m(q)\cdot\\ \cdot\hat{a}^+_{(m_1+m)(k_1+q)\sigma}\hat{a}^+_{(m_2-m)(k_2-q)\sigma}\hat{a}_{m_2k_2\sigma}\hat{a}_{m_1k_1\sigma},\end{gathered} \tag{2}$$

где

$$\varepsilon_{mk}=\varepsilon_0m^2+\frac{\hbar^2k^2}{2m_*}$$

– энергия электрона с эффективной массой m_* в состоянии $|mk\sigma\rangle$, $\sigma=\pm1$ – спиновое квантовое число, $\varepsilon_0=\hbar^2/2m_*a^2$ – вращательный квант, $\hat{a}_{mk\sigma}$ и $\hat{a}^+_{mk\sigma}$ – операторы уничтожения и рождения электронов в состоянии $|mk\sigma\rangle$,

$$\upsilon_m(q)=\int_0^{2\pi}ad\varphi\int_{-\infty}^{+\infty}dz\upsilon(\varphi,z)e^{-i(m\varphi+qz)}$$

– цилиндрическая гармоника энергии взаимодействия электронов $\upsilon(\varphi,z)$.

Согласно Боголюбову [9] куперовские пары образуют электроны с противоположными импульсами, спинами и орбитальными моментами: $\lambda_1+\lambda_2=0$, где $\lambda=(m,k,\sigma)$. Тогда гамильтониан электрон – электронного взаимодействия (2) в модели БКШ принимает вид

$$\hat{V}=-\frac{g}{S}\sum_{\lambda\neq\lambda'}\hat{a}^+_{-\lambda}\hat{a}^+_{\lambda}\hat{a}_{\lambda'}\hat{a}_{-\lambda'},$$

где g – константа взаимодействия.

Каноническое преобразование Боголюбова

$$\hat{a}_\lambda=u_\lambda\hat{\alpha}_\lambda+\upsilon_\lambda\hat{\beta}^+_\lambda,\quad \hat{a}^+_\lambda=u_\lambda\hat{\alpha}^+_\lambda+\upsilon_\lambda\hat{\beta}_\lambda$$

дает

$$\begin{gathered}\hat{H}=U+\sum_\lambda A_\lambda\left(\hat{\alpha}^+_\lambda\hat{\alpha}_\lambda+\hat{\beta}^+_\lambda\hat{\beta}_\lambda\right)+\\ +\sum_\lambda B_\lambda\left(\hat{\alpha}^+_\lambda\hat{\beta}^+_\lambda+\hat{\beta}_\lambda\hat{\alpha}_\lambda\right)-\frac{g}{S}\sum_{\lambda\neq\lambda'}\hat{\Lambda}^+_\lambda\hat{\Lambda}_{\lambda'}.\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $\hat{\alpha}_\lambda$ и $\hat{\beta}_\lambda$ – новые операторы, $u^2_\lambda+\upsilon^2_\lambda=1$,

$$U=-\sum_\lambda Cu_\lambda\upsilon_\lambda+2\sum_\lambda\xi_\lambda\upsilon^2_\lambda,$$

$$A_\lambda=\xi_\lambda\left(u^2_\lambda-\upsilon^2_\lambda\right)+2u_\lambda\upsilon_\lambda C,$$

$$B_\lambda=2\xi_\lambda u_\lambda\upsilon_\lambda-\left(u^2_\lambda-\upsilon^2_\lambda\right)C,$$

$$C=\frac{g}{S}\sum_\lambda u_\lambda\upsilon_\lambda,$$

$$\hat{\Lambda}_\lambda=u^2_\lambda\hat{\alpha}_\lambda\hat{\beta}_\lambda-\upsilon^2_\lambda\hat{\beta}^+_\lambda\hat{\alpha}^+_\lambda+u_\lambda\upsilon_\lambda\left(\hat{\alpha}^+_\lambda\hat{\alpha}_\lambda+\hat{\beta}^+_\lambda\hat{\beta}_\lambda\right),$$

$\xi_\lambda=\varepsilon_\lambda-\mu$, μ – химический потенциал.

Квадратичная часть $\hat{H}_0$ гамильтониана (3) диагонализируется преобразованием

$$\hat{\alpha}_\lambda=\lambda_\lambda\hat{c}_\lambda-\mu_\lambda\hat{b}^+_\lambda,\quad \hat{\beta}_\lambda=\lambda_\lambda\hat{b}_\lambda+\mu_\lambda\hat{c}^+_\lambda,$$

где $\lambda^2_\lambda+\mu^2_\lambda=1$. Требуя, чтобы слагаемые с $\hat{c}_\lambda\hat{b}_\lambda$ и $\hat{c}^+_\lambda\hat{b}^+_\lambda$ отсутствовали, получаем

$$2\lambda_\lambda\mu_\lambda=\frac{B_\lambda}{A_\lambda}\left(\lambda^2_\lambda-\mu^2_\lambda\right).$$

В результате находим

$$\lambda^2_\lambda=\frac{1}{2}\left(1+\frac{A_\lambda}{E_\lambda}\right),$$

$$\mu^2_\lambda=\frac{1}{2}\left(1-\frac{A_\lambda}{E_\lambda}\right),$$

$$E_\lambda=\sqrt{\xi^2_\lambda+C^2},$$

$$\hat{H}_0=\sum_\lambda\left(\xi_\lambda+u_\lambda\upsilon_\lambda C-E_\lambda\right)+\sum_\lambda E_\lambda\left(\hat{c}^+_\lambda\hat{c}_\lambda+\hat{b}^+_\lambda\hat{b}_\lambda\right).$$

Квазичастичная структура гамильтониана $\hat{H}_0$

очевидна.

Используя статистический принцип Боголюбова [9], авторы работы [8] получили уравнение для щели Δ:

$$1 = \frac{g}{2S} \sum_{mk} \frac{\operatorname{th}\left(\beta E_{\lambda} / 2\right)}{\sqrt{\xi_{\lambda}^{2} + \Delta^{2}}}, \tag{4}$$

где β – обратная температура.

Обычно линейная плотность электронов n_L удовлетворяет неравенству $n_L < 2/\pi a$. Тогда электроны частично заполняют лишь подзону с $m = 0$, реализуется квантовый предел. В этом случае из уравнения (4) при нулевой температуре получаем

$$\Delta_0 = 2\tilde{\varepsilon} \exp\left(-\frac{4\pi\hbar^2}{g m_*} \sqrt{a n_L} \right), \tag{5}$$

где $2\tilde{\varepsilon}$ – ширина слоя у границы Ферми, внутри которого электроны взаимодействуют. Это выражение зависит от двух параметров $\hbar^2 / g m_*$ и $a n_L$. Используя значения этих параметров для углеродных нанотрубок [7], из (5) получаем зависимость величины щели от плотности электронов, показанную на рис. 1.

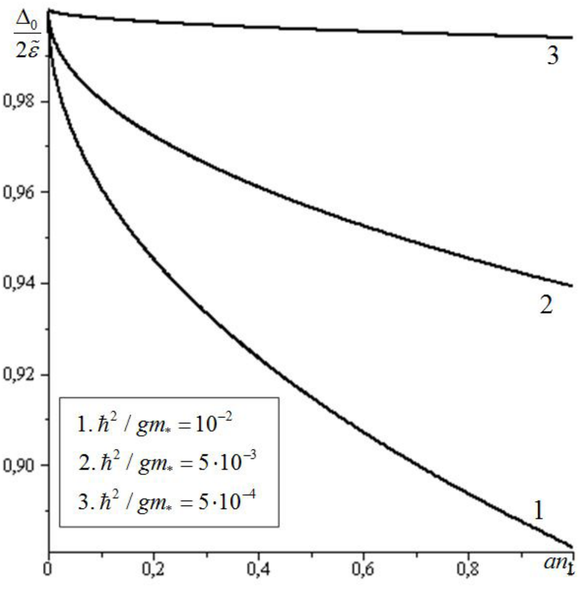

Рис. 1. Зависимость энергетической щели (5) от плотности электронов.

Если $\left(a n_L\right)^{1/4} >> \hbar^2 / g m_*$, входящую в (4) сумму по m можно вычислить при помощи формулы Пуассона:

$$\Delta_0 = 2\tilde{\varepsilon} \exp\left(-\frac{2\pi\hbar^2}{g m_*} \right) \left[1 + \frac{4\hbar^2}{g m_* \left(a n_L\right)^{1/4}} \cdot \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{l}} \cos\left(2\pi l \sqrt{a n_L} - \frac{\pi}{4} \right) \right]. \tag{6}$$

При $a \to \infty$ это выражение переходит в Δ_0 для двумерного электронного газа на плоскости. Нас рис. 2 показана зависимость относительной осциллирующей добавки к величине щели

$$\delta\Delta_0 = \frac{\Delta_0 - 2\tilde{\varepsilon} \exp\left(-2\pi\hbar^2 / g m_*\right)}{2\tilde{\varepsilon} \exp\left(-2\pi\hbar^2 / g m_*\right)} \tag{7}$$

от плотности электронов.

Причиной осцилляций Δ_0 типа де Гааза – ван

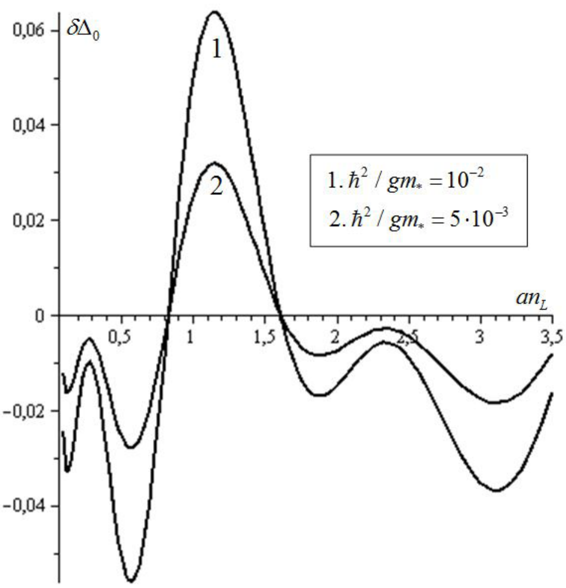

Рис. 2. Зависимость относительной осциллирующей добавки (7) от плотности электронного газа.

Альфена является прохождение корневых особенностей плотности состояний электронного газа через границу Ферми при изменении $a n_L$.

В магнитном поле, параллельном оси трубки, в формуле (6) под знаком суммы по l содержится множитель $\cos\left(2\pi l \Phi / \Phi_0\right)$, описывающий осцилляции Ааронова – Бома величины щели. Здесь Φ – магнитный поток через сечение трубки, Φ_0 – квант потока [8]. Эти осцилляции показаны на рис. 3.

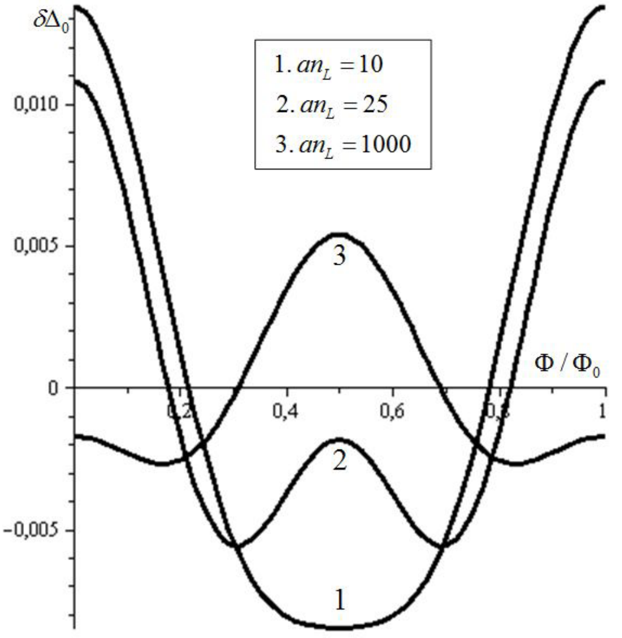

Рис. 3. Полевая зависимость относительной осциллирующей добавки (7).

Метод Горькова

В методе Горькова [10-12] фигурируют нормальная и аномальные функции Грина:

$$\begin{gathered}\mathrm{G}_{\alpha_1\alpha_2}\left(\mathbf{r}_1,\tau_1;\mathbf{r}_2,\tau_2\right)=\\=-\left\langle \mathrm{T}_\tau\left[\hat\Psi_{\alpha_1}\left(\mathbf{r}_1,\tau_1\right)\hat{\bar\Psi}_{\alpha_2}\left(\mathbf{r}_2,\tau_2\right)\right]\right\rangle,\\ \mathrm{F}_{\alpha_1\alpha_2}\left(\mathbf{r}_1,\tau_1;\mathbf{r}_2,\tau_2\right)=\\=-\left\langle \mathrm{T}_\tau\left[\hat\Psi_{\alpha_1}\left(\mathbf{r}_1,\tau_1\right)\hat\Psi_{\alpha_2}\left(\mathbf{r}_2,\tau_2\right)\right]\right\rangle,\\ \overline{\mathrm{F}}_{\alpha_1\alpha_2}\left(\mathbf{r}_1,\tau_1;\mathbf{r}_2,\tau_2\right)=\\=-\left\langle \mathrm{T}_\tau\left[\hat{\bar\Psi}_{\alpha_1}\left(\mathbf{r}_1,\tau_1\right)\hat{\bar\Psi}_{\alpha_2}\left(\mathbf{r}_2,\tau_2\right)\right]\right\rangle,\end{gathered}\tag{8}$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор электрона на поверхности трубки, α – спиновая переменная, τ – мнимое время, $\hat\Psi$ и $\hat{\bar\Psi}$ – мацубаровские полевые операторы электронов, T_τ – символ хронологического упорядочения операторов, $\langle\ldots\rangle$ означает гиббсовское усреднение.

Система уравнений для функций (8) имеет обычный вид

$$\begin{gathered}\left(-\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m_*}+\mu\right)\mathrm{G}\left(\varphi,z,\tau\right)+\\+g\theta\,\overline{\mathrm{F}}\left(\varphi,z,\tau\right)=\delta\left(a\varphi\right)\delta\left(z\right)\delta\left(\tau\right),\\ \left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m_*}+\mu\right)\overline{\mathrm{F}}\left(\varphi,z,\tau\right)-g\theta^*\,\mathrm{G}\left(\varphi,z,\tau\right)=0,\end{gathered}\tag{9}$$

где $\theta\left(\mathbf{r}\right)=\mathrm{F}\left(\mathbf{r},0;\mathbf{r},0\right)$ – конденсатная волновая функция. Используя разложение функций (8) по цилиндрическим гармоникам (1) и по τ

$$\begin{pmatrix}\mathrm{G}\left(\varphi,z,\tau\right)\\ \overline{\mathrm{F}}\left(\varphi,z,\tau\right)\end{pmatrix}=\frac{1}{S}\sum_{mk}\frac{1}{\beta}\sum_s\begin{pmatrix}\mathrm{G}_{mk}\left(\xi_s\right)\\ \overline{\mathrm{F}}_{mk}\left(\xi_s\right)\end{pmatrix}e^{i\left(m\varphi+kz-\xi_s\tau\right)},$$

из (9) получаем

$$\begin{gathered}\left(i\xi_s-\xi_{mk}\right)\mathrm{G}_{mk}\left(\xi_s\right)+g\theta\,\overline{\mathrm{F}}_{mk}\left(\xi_s\right)=1,\\ \left(i\xi_s-\xi_{mk}\right)\overline{\mathrm{F}}_{mk}\left(\xi_s\right)+g\theta^*\,\mathrm{G}_{mk}\left(\xi_s\right)=0.\end{gathered}$$

Здесь ξ_s – нечетные мацубаровские частоты. Решение этой системы имеет вид

$$\mathrm{G}_{mk}\left(\xi_s\right)=-\frac{i\xi_s+\xi_{mk}}{\xi_s^2+E_{mk}^2},\quad \overline{\mathrm{F}}_{mk}\left(\xi_s\right)=\frac{g\theta^*}{\xi_s^2+E_{mk}^2},$$

где $E_{mk}=\sqrt{\xi_{mk}^2+\Delta^2}$, $\Delta^2=g^2\left|\theta\right|^2$. Подставляя $\overline{\mathrm{F}}$ в разложение

$$\theta^*=\overline{\mathrm{F}}\left(\mathbf{r}=0,\tau=0\right)=\frac{1}{S}\sum_{mk}\frac{1}{\beta}\sum_s\overline{\mathrm{F}}_{mk}\left(\xi_s\right),$$

получаем для щели уравнение (4).

Метод Келдыша и континуальные интегралы

Метод Келдыша [13-15] в сочетании с техникой функционального интегрирования по полям Грассмана [16] все чаще используется в квантовой кинетике. В теории сверхпроводимости этот метод использовался в работах [3,17,18]. Следуя работе [18], получим этим методом уравнение для щели в спектре возбуждений электронного газа на поверхности нанотрубки.

Гамильтониан БКШ в координатном представлении имеет вид

$$\hat H=\hat H_0+\hat V,\quad \hat H_0=\sum_\alpha\int d\mathbf{r}\hat\Psi_\alpha^+\left(\mathbf{r}\right)\hat\xi\hat\Psi_\alpha\left(\mathbf{r}\right),$$

$$\hat V=-\frac{g}{2}\sum_\alpha\int d\mathbf{r}\hat\Psi_\alpha^+\left(\mathbf{r}\right)\hat\Psi_{-\alpha}^+\left(\mathbf{r}\right)\hat\Psi_{-\alpha}\left(\mathbf{r}\right)\hat\Psi_\alpha\left(\mathbf{r}\right),$$

$$\hat\xi=-\frac{\hbar^2}{2m_*}\nabla^2-\mu,\quad d\mathbf{r}=ad\varphi dz.$$

След оператора эволюции вдоль контура Келдыша $C=C_++C_-$ на рис.4 равен

$$Z=\int D\left(\psi^*,\psi\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}S\left[\psi^*,\psi\right]\right),\tag{10}$$

где $\psi_\alpha\left(\mathbf{r},t\right)$ и $\psi_\alpha^*\left(\mathbf{r},t\right)$ – поля Грассмана,

$$S\left[\psi^*,\psi\right]=\oint_C dt\int d\mathbf{r}\left[\sum_\alpha \psi_\alpha^*\left(\mathbf{r},t\right)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\hat{\xi}\right)\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\psi_\alpha\left(\mathbf{r},t\right)+g\psi_+^*\left(\mathbf{r},t\right)\psi_-^*\left(\mathbf{r},t\right)\psi_-\left(\mathbf{r},t\right)\psi_+\left(\mathbf{r},t\right)\right]$$

– действие. Нижними индексами $\pm$ отмечены ориентации спина электрона. Экспонента в (10), содержащая произведение четырех переменных Грассмана, при помощи преобразования Хаббарда – Стратоновича приводится к виду

$$\exp\left[\frac{ig}{\hbar}\oint_C dt\int d\mathbf{r}\,\psi_+^*\left(\mathbf{r},t\right)\psi_-^*\left(\mathbf{r},t\right)\psi_-\left(\mathbf{r},t\right)\psi_+\left(\mathbf{r},t\right)\right]=$$
$$=\int D\left(\Delta^*,\Delta\right)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\oint_C dt\int d\mathbf{r}\left[-\frac{1}{g}\Delta^*\left(\mathbf{r},t\right)\Delta\left(\mathbf{r},t\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\Delta\left(\mathbf{r},t\right)\psi_+^*\left(\mathbf{r},t\right)\psi_-^*\left(\mathbf{r},t\right)+\Delta^*\left(\mathbf{r},t\right)\psi_-\left(\mathbf{r},t\right)\psi_+\left(\mathbf{r},t\right)\right]\right\}\cdot$$
$$\cdot\left\{\int D\left(\Delta^*,\Delta\right)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\oint_C dt\int d\mathbf{r}\frac{1}{g}\Delta^*\left(\mathbf{r},t\right)\Delta\left(\mathbf{r},t\right)\right]\right\}^{-1},$$

где Δ и Δ^* – вспомогательные бозевские поля. В результате, $S=S_\Delta+S_{MFA}$, где

$$S_\Delta=-\frac{1}{g}\int_{-\infty}^{\infty}dt\int d\mathbf{r}\left[\Delta^{+*}\left(\mathbf{r},t\right)\Delta^+\left(\mathbf{r},t\right)-\right.$$
$$\left.-\Delta^{-*}\left(\mathbf{r},t\right)\Delta^-\left(\mathbf{r},t\right)\right],$$

$$S_{MFA}=\oint_C dt\int d\mathbf{r}\left[\sum_\alpha\psi_\alpha^*\left(\mathbf{r},t\right)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\hat{\xi}\right)\psi_\alpha\left(\mathbf{r},t\right)+\right.$$
$$\left.+\Delta^*\left(\mathbf{r},t\right)\psi_-\left(\mathbf{r},t\right)\psi_+\left(\mathbf{r},t\right)+\Delta\left(\mathbf{r},t\right)\psi_+^*\left(\mathbf{r},t\right)\psi_-^*\left(\mathbf{r},t\right)\right].$$

Верхние индексы $\pm$ нумеруют ветви контура $C_\pm$ на рис.4.

Следуя Горькову – Намбу, введем спиноры

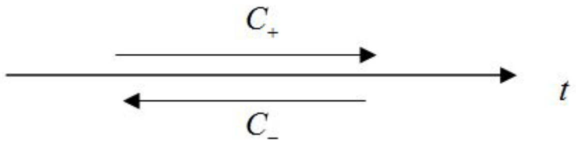

Рис. 4. Контур Келдыша.

$\left(\psi_+^{+*}\quad\psi_-^+\right),\left(\psi_+^{-*}\quad\psi_-^-\right)$ и им сопряженные. Тогда часть действия S_{MFA} на ветвях $C_\pm$ контура Келдыша принимает вид

$$S_{MFA}^+=tr\left[\begin{pmatrix}\psi_+^{+*} & \psi_-^+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\hbar\partial_t-\hat{\xi} & \Delta^+\\ \Delta^{+*} & i\hbar\partial_t+\hat{\xi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_+^+\\ \psi_-^{+*}\end{pmatrix}\right],$$

$$S_{MFA}^-=tr\left[\begin{pmatrix}\psi_+^{-*} & \psi_-^-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i\hbar\partial_t+\hat{\xi} & -\Delta^+\\ -\Delta^{+*} & -i\hbar\partial_t-\hat{\xi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_+^-\\ \psi_-^{-*}\end{pmatrix}\right],$$

где $tr\left[\ldots\right]=\int_{-\infty}^{\infty}dt\int d\mathbf{r}\left[\ldots\right]$. Целесообразно объединить пространства Горькова – Намбу и Келдыша путем использования биспиноров $\psi=\begin{pmatrix}\psi_+^+ & \psi_-^{+*} & \psi_+^- & \psi_-^{-*}\end{pmatrix}$ и $\psi^*=\begin{pmatrix}\psi_+^{+*} & \psi_-^+ & \psi_+^{-*} & \psi_-^-\end{pmatrix}$. Тогда

$$S_{MFA}=tr\left[\psi^*\,\mathrm{G}^{-1}\psi\right],$$

где матрица 4x4 G^{-1} равна

$$\mathrm{G}^{-1}=\begin{pmatrix}i\hbar\partial_t-\hat{\xi} & \Delta^+ & 0 & 0\\ \Delta^{+*} & i\hbar\partial_t+\hat{\xi} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -i\hbar\partial_t+\hat{\xi} & -\Delta^-\\ 0 & 0 & -\Delta^{-*} & -i\hbar\partial_t-\hat{\xi}\end{pmatrix}. \quad (11)$$

В результате получаем

$$Z=\int D\left(\psi^*,\psi\right)\int D\left(\Delta^*,\Delta\right)\cdot$$
$$\cdot\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[S_\Delta+tr\left(\psi^*\,\mathrm{G}^{-1}\psi\right)\right]\right\}.$$

Входящий сюда континуальный интеграл по грассмановым полям гауссов. Он равен

$$\int D\left(\psi^*,\psi\right)\exp\left[\frac{i}{\hbar}tr\left(\psi^*\,\mathrm{G}^{-1}\psi\right)\right]=$$
$$=\det\mathrm{G}^{-1}=\exp\left[Tr\ln\mathrm{G}^{-1}\right],$$

где Tr включает в себя дополнительное суммирование по индексам в 4 – мерном пространстве Горькова – Намбу – Келдыша. Величина Z свелась к интегралу по бозе – полям:

$$Z=\int D\left(\Delta^*,\Delta\right)\exp\left[\frac{i}{\hbar}S_\Delta+Tr\ln\mathrm{G}^{-1}\right].$$

Он вычисляется методом стационарной фазы.

Выделим диагональную часть матрицы (11): $\mathrm{G}^{-1}=\mathrm{G}_0^{-1}+\Delta,$ где

$$\Delta = \begin{pmatrix} \underline{\Delta}^{+} & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{\Delta}^{-} \end{pmatrix}, \quad \underline{\Delta}^{\pm} = \begin{pmatrix} 0 & \Delta^{\pm} \\ \Delta^{\pm *} & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы 2x2 отмечены нижней чертой.

Матричная функция Грина – Келдыша имеет структуру [14,15]

$$\underline{\mathrm{G}} = \begin{pmatrix} \mathrm{G}^{++} & \mathrm{G}^{+-} \\ \mathrm{G}^{-+} & \mathrm{G}^{--} \end{pmatrix},$$

где индексы $\pm$ нумеруют ветви контура $C_{\pm}$. Ее матричные элементы не являются независимыми, поэтому удобно совершить поворот в пространстве Келдыша с целью обратить один матричный элемент в нуль:

$$\mathfrak{G}_0^{-1} = \mathfrak{L}\,\mathrm{G}_0^{-1}\sigma_3\mathfrak{L}^{-1},$$

где

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

а σ_3 – третья матрица Паули. Тогда матрица $\mathfrak{G}_0$ принимает вид

$$\mathfrak{G}_0 = \begin{pmatrix} \underline{\mathfrak{G}}_R & \underline{\mathfrak{G}}_K \\ \underline{0} & \underline{\mathfrak{G}}_A \end{pmatrix},$$

$$\underline{\mathfrak{G}}_\alpha = \begin{pmatrix} \mathfrak{G}_\alpha(\varepsilon) & 0 \\ 0 & -\mathfrak{G}_\alpha^*(-\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Здесь $\alpha = R, A, K$ – индекс, нумерующий запаздывающую, опережающую функции Грина и функцию Келдыша. Совершен переход к ε – представлению. С точностью до константы

$$Tr\ln\mathrm{G}^{-1} = const + Tr\ln\left(\mathfrak{G}_0^{-1} + \tilde{\Delta}\right),$$

где

$$\tilde{\Delta} = \begin{pmatrix} \underline{\Delta}_{cl} & \underline{\Delta}_q \\ \underline{\Delta}_q & \underline{\Delta}_{cl} \end{pmatrix}, \quad \underline{\Delta}_{cl|q} = \begin{pmatrix} 0 & \Delta_{cl|q} \\ \Delta_{cl|q}^* & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_{cl} = \frac{1}{2}\left(\Delta_+ + \Delta_-\right), \quad \Delta_q = \frac{1}{2}\left(\Delta_+ - \Delta_-\right)$$

– классическая и квантовая компоненты Δ. В результате находим

$$\frac{i}{\hbar}S = -\frac{2i}{g\hbar}tr\left(\Delta_{cl}^*\Delta_q + \Delta_{cl}\Delta_q^*\right) + +Tr\ln\left(1 + \mathfrak{G}_0\tilde{\Delta}\right). \quad (12)$$

Уравнение для классической компоненты Δ_{cl} получается функциональным дифференцированием (12) по Δ_q^* [18]:

$$\left(\frac{\delta S}{\delta\Delta_q^*}\right)_{\Delta_q=0} = 0. \quad (13)$$

Используя связь равновесных функций Грина

$$\mathrm{G}_K(\varepsilon) = \left[\mathrm{G}_R(\varepsilon) - \mathrm{G}_A(\varepsilon)\right]\mathrm{th}\frac{\beta\varepsilon}{2},$$

вычисляя след произведения матриц, приводим уравнение (13) к виду

$$\frac{1}{g} = -\frac{1}{S}\sum_{mk}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varepsilon}{2\pi}\mathrm{th}\frac{\beta\varepsilon}{2}\cdot \cdot\mathrm{Im}\frac{1}{\varepsilon^2 - \xi_{mk}^2 - \left|\Delta_{cl}\right|^2 + i\varepsilon 0}.$$

Входящая сюда мнимая часть выражается через δ -функции. После интегрирования по ε получаем уравнение для щели (4).

1. Т. Андо, А. Фаулер, Ф. Стерн, Электронные свойства двумерных систем, Мир, Москва (1985).
2. В.Л. Гинзбург, Д.А. Киржниц, ЖЭТФ 46, 397 (1964).
3. В.П. Гусынин, В.М. Локтев, И.А. Шовковый, ЖЭТФ 107, 2007 (1995).
4. Э.А. Пашицкий, ФНТ 25, 920 (1999).
5. S. Iijima, Nature 354, 56 (1991).
6. Л.И. Магарилл, А.Б. Чаплик, М.В. Энтин, УФН 175, 995 (2005).
7. M. Kociak, A.Yu Kasumov, S. Guerson, B. Reulet, I.I. Khodos, Yu.B. Gorbatov, V.T. Volkov, L. Vaccarini, and H. Bouchiat, Phys. Rev. Lett. 86, 2416 (2001).
8. П.А. Эминов, Ю.И. Сезонов, ЖЭТФ 134, 772 (2008).
9. Н.Н. Боголюбов, Избранные труды, т. 3, Наукова думка, Киев (1971).
10. Л.П. Горьков, ЖЭТФ 34, 735 (1958).
11. А.А. Абрикосов, Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский, Методы квантовой теории поля в статистической физике, ФМ, Москва (1962).
12. Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, Статистическая физика, ч.2, ФМЛ, Москва (2004).
13. Л.В. Келдыш, ЖЭТФ 47, 1515 (1964).
14. Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, Физическая кинетика, ФМЛ, Москва (2002).
15. А.М. Ермолаев, Г.И. Рашба, Метод Келдыша в квантовой кинетике, Вид. центр ХНУ, Харків (2005).
16. J.W. Negele and H. Orland, Quantum Many – Particle Systems, Addison – Wesley Publ. Co, California (1988).
17. M.V. Feigelman, A.I. Larkin, M.A. Skvortsov, Phys. Rev. B61, 12361 (2000).
18. A. Levchenko, Вісник ХНУ, серія «Фізика», №783, вип. 10, 34 (2007).