Вісник ХНУ, № 915, серія «Фізика», вип. 14, 2010. с.32 – 34

УДК 530.1
PACS: 47.53.+n

О математических и физических фракталах. IV

А.В.Лымарь, В.В.Ульянов

Харьковский национальный университет им. В.Н.Каразина
Украина, 61077, г. Харьков, пл. Свободы, 4
E-mail: Vladimir.V.Ulyanov@univer.kharkov.ua

Обсуждается современное представление о фрактальных объектах и явлениях.Разработаны программы для компьютерных исследований некоторых математических и физических фракталов.
Ключевые слова: фрактал, множество Мандельброта.

Обговорюється сучасне уявлення про фрактальні об'єкти та явища. Розроблено програми для комп' ютерних досіджень деяких математичних і фізичних фракталів.
Ключові слова: фрактал, безліч Мандельброта.

The modern idea about fractal objects and phenomena is discussed.The programs of computer investigations for some mathematical and physical fractals have been worked out.
Keywords: fractal, the Mandelbrot set.

Здесь приводятся [1] исследование фрактальных объектов, являющиеся обобщением канонических множеств Мандельброта (ММ).

О степенных аналогах множеств Мандельброта

В данной работе в качестве аналогов множества Мандельброта (ММ) рассматриваются результаты отображений для линейной комбинации степенных вкладов: это множество всех комплексных чисел P, для которых абсолютная величина выражения $aZ^K + bZ^{K+1} + P$ с некоторыми значениями показателя степени K и коэффициентов a и b остается конечной даже после бесконечно большого количества итераций $Z \leftarrow aZ^K + bZ^{K+1} + P$, стартующих от точки $Z = 0$, или

$$Z_{n+1} \leftarrow aZ_n{}^K + bZ_n{}^{K+1} + P,\ Z_0 = 0,$$
$$n = 0,1,2,\dots . \quad (1)$$

Разработана специальная программа для анимационных наблюдений за превращениями аналогов ММ при различных значениях как показателя степени K, так и коэффициентов a и b.

Некоторые характерные формы таких аналогов представлены на прилагаемых рисунках.

В качестве конкретных результатов приводим следующие примеры.

Во-первых, случай перехода от чисто квадратичного отображения к кубическому, когда показатель степени $K = 2$ и $a = 1 - b$ при постепенном изменении величины b от 0 до 1. Это наблюдение осуществляется на основе серии 100 кадров, позволяющих проследить за непрерывной деформацией аналогов ММ. Данный переход существенно отличается от того, что происходило при изменении показателя степени $2 \le K \le 3$, описанного в предыдущей статье [1]. Все детали можно увидеть на созданной анимационной демонстрации. Уже при $b = 0.1$ происходит перестройка квадратичной структуры в кубическую, фактически завершающаяся при $b = 0.3$. На рис.1.1 зафиксирована одна из любопытных структур при преобразовании степенных аналогов ММ для указанного перехода (кадр 15, соответствующий значениям $a = 0.85$ и $b = 0.15$).

Во-вторых, при том же $K = 2$ случай фиксированных значений коэффициентов: $a = 1$ и

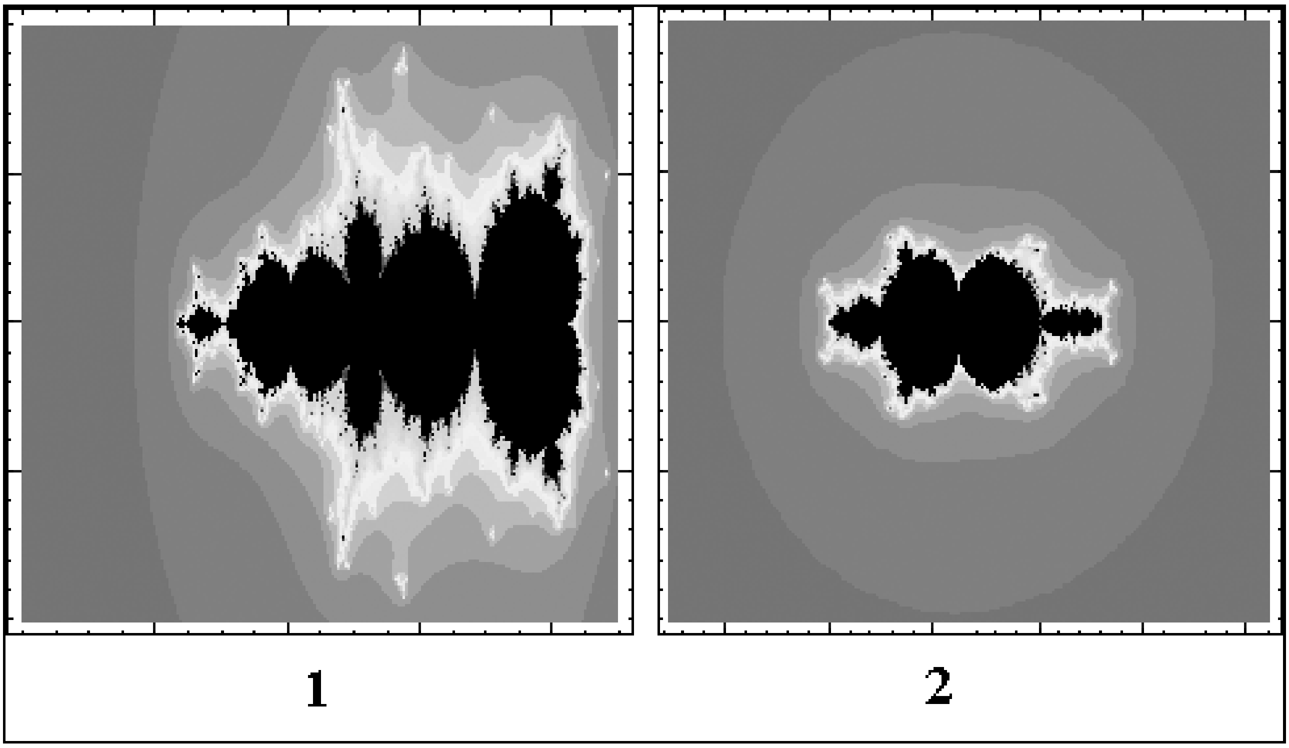

Рис. 1. Характерный кадр демонстрации перехода от квадратичного ММ к его кубическому аналогу на основе линейной комбинации степенных отображений ($K = 2$): 1 – случай $a = 0.85$ и $b = 0.15$; 2 – случай $a = 1$ и $b = -1$.

$b = -1$. Этот аналог ММ представлен на рис.1.2. Получается структура необычной формы, так что любопытно узнать, каким образом она формируется из канонического ММ. Для этого создана соответствующая серия построений при фиксированном $a = 1$ и плавно изменяющихся значений параметра 0 ≥ b ≥ –1. Оказывается, левая овальная часть основного тела после некоторых перестроений сохраняет форму, типичную для квадратичного ММ, а правая часть постепенно разрастается из присоединяемых отростков.

В-третьих, случай перехода от чисто кубического отображения к четверному, когда показатель степени $K = 3$ и $a = 1 - b$ при постепенном изменении величины b от 0 до 1. Это наблюдение также осуществляется на основе серии 100 кадров, позволяющих проследить за непрерывной деформацией аналогов ММ. Данный переход тоже существенно отличается от того, что происходило при изменении показателя степени $3 \le K \le 4$, описанного в предыдущей статье [1]. Все детали можно увидеть на созданной анимационной демонстрации. Уже при $b = 0.2$ начинается перестройка кубической структуры в четверную, фактически завершающаяся при $b = 0.5$. На рис.2 зафиксирована одна из любопытных структур при преобразовании степенных аналогов ММ для рассматриваемого процесса (кадр 40, соответствующий значениям $a = 0.6$ и $b = 0.4$).

В-четвертых, при том же $K = 3$ случай фиксированных значений коэффициентов: $a = 1$ и $b = -1$. Для этого случая также создана соответствующая серия построений при фиксированном $a = 1$ и плавно изменяющихся значений параметра 0 ≥ b ≥ –1 . При этом левая 8-образная часть основного тела после незначительных искажений сохраняет форму, типичную для кубического аналога ММ, а правая часть постепенно разрастается из присоединяемых фрагментов.

Помимо упомянутых анимационных разработок, нами созданы программы и для изучения многообразия множеств Жюлиа для каждого данного аналога множества Мандельброта (ММ) в виде двумерных серий картин. Однако в данном сообщении мы ограничимся описанием результатов только для аналогов ММ.

Как показали наши исследования, рассмотренные структуры аналогов множества Мандельброта на

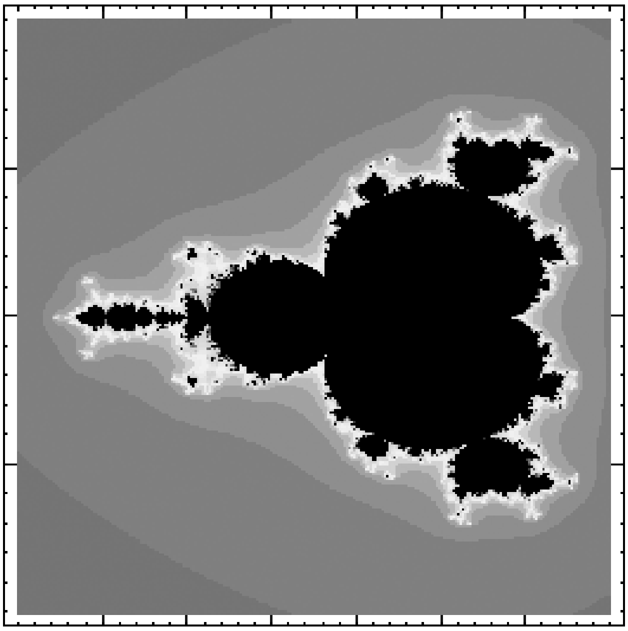

Рис. 2. Характерный кадр демонстрации перехода от кубического аналога ММ к его четверному аналогу на основе линейной комбинации степенных отображений (K=3): случай $a = 0.6$ и $b = 0.4$.

основе линейных комбинаций степенных функций для отображений (1), существенно отличаясь по форме от канонических ММ, во многом наследуют их общие фрактальные свойства: наличие основного тела с изрезанными границами и характерными наростами-бородавками с усиками-антеннами, многочисленные тонкие нити-отростки, пронизывающие всю комплексную плоскость P и т. п.

Как уже сообщалось ранее [1], более подробно основные результаты по теме разного рода степенных аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа, а также о взаимопревращениях соответствующих степенных структур, предполагается изложить в готовящейся к изданию второй части монографии [2] с приложением наших компьютерных программ в явном виде.

Благодарим А.М.Ермолаева за интерес к нашей работе и неизменную поддержку.

1. А.В.Лымарь, В.В.Ульянов, *Вестник ХНУ*, **865**, сер. «Физика», в. 12, 27 (2009).
2. Е.Н.Синельник, В.В.Ульянов, *Фракталы: от математики к физике*, ХНУ им. В.Н.Каразина, Харьков (2005).