УДК: 537.213
PACS: 03.50.-z

Специфика определения потенциала полей некоторых абстрактных электростатических систем

В.А. Летяго

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, Харьков, Украина, 61077

Обсуждается специфика определения потенциала полей некоторых абстрактных электростатических моделей. Показано, что потенциал их полей может быть найден и в рамках принципа аддитивности потенциала.
Ключевые слова: потенциал, принцип аддитивности потенциала.

Обговорюється специфіка визначення потенціалу полів деяких електростатичних моделей. Показано, що потенціал їх полів може бути визначений і в межах принципу адитивності потенціалу.
Ключові слова: потенціал, принцип адитивності потенціалу.

We discuss how to determine a potential of some abstract electrostatic arrays. The potential of these arrays is shown to be determined in the framework of a potential additives principle.
Keywords: potential, potential additives principle.

В учебных пособиях по электричеству и магнетизму, предназначенных для студентов физических и технических специальностей высших учебных заведений, обычно приводятся примеры, связанные с рассмотрением полей некоторых абстрактных электростатических систем. Системы, о которых будет идти речь ниже, являются безграничными и имеют бесконечно большой по величине электрический заряд. В этом смысле они являются абстрактными. К их примеру следует отнести, например, бесконечные прямолинейную нить [1,3-5,8,15,17,18,21] и плоскость [1,2,4-11,14-17,19-21,23], заряженные равномерно. Нередко рассматриваются и поля бесконечных цилиндров круглого сечения, по поверхности или объему которых заряды распределены равномерно [1-3,6,7,10,11,13,14,16,19,20,22]. Уделяется внимание и задаче о поле безграничного и однородно заряженного плоскопараллельного слоя (см., например, [1,6,12,13]).

Такое внимание к названным системам связано с тем, что на их примере очень наглядно можно продемонстрировать при расчетах вектора напряженности поля применение принципа суперпозиции и теоремы Гаусса. Указанные модели имеют и некоторое практическое значение. Так, например, хорошо известно, что электрическое поле вблизи центра равномерно заряженной плоской пластины правильной формы практически совпадает с полем плоскости, о которой шла речь выше. На основании этого легко рассчитать напряженность электрического поля внутри плоского конденсатора, который, как известно, нашел широкое применение в электротехнике. Электрическое поле равномерно заряженного прямолинейного отрезка в окрестности его центра близко к полю прямолинейной бесконечной нити. Это находит применение при расчетах напряженности поля внутри счетчика Гейгера-Мюллера.

Абстрактные электростатические системы, названные в данной работе, по тексту ниже из соображения удобства будем называть сокращенно, а именно, нить, плоскость, цилиндр круглого сечения и так далее. Отметим, что большинство книг по электричеству и магнетизму, рассматриваемых в данной работе, являются широко известными.

Необходимо подчеркнуть, что обычно в учебных пособиях расчет напряженности электрического поля абстрактных моделей тем или иным способом выполняется в достаточно полном объеме на уровне, который доступен для студентов младших курсов. А вот рассмотрение в них потенциала φ таких систем в большинстве случаев по многим причинам трудно назвать удовлетворительным. Например, в части книг потенциал φ полей названных моделей либо совсем не рассматривается [2,8,9,10,19-21,23], либо просто приводятся формулы для φ без указания процедуры их получения [7] или предлагается найти рекомендованным способом необходимые выражения самостоятельно [1,6]. Например, в [11,14,15,16,17,22] только одним способом, а именно, по известной напряженности поля рассчитывается потенциал заданной точки или разность потенциалов между двумя точками. При этом комментарии к вычислениям либо отсутствуют, либо они недопустимо кратки. Только в отдельных учебных пособиях (см., например, [3,4]) выполнено некоторое обсуждение потенциала электрического поля, например, нити с позиций принципа аддитивности потенциала. Однако отдельные утверждения, сделанные по этому поводу в [3,4], к сожалению, не являются убедительными. Вероятно, необходимо признать, что в такой ситуации студенту, который приступил к изучению электричества и магнетизма, непросто самостоятельно разобраться в тонкостях данного вопроса. Поэтому целью настоящей научно-методической работы является систематизация особенностей определения потенциала электрических полей систем, названных выше, на уровне, соответствующем физическим специальностям классических университетов. Также предполагается уделить большее внимание данному вопросу и с позиции принципа аддитивности потенциала.

В курсе «Электричество и магнетизм» показывается, что потенциал электростатического поля определяется с точностью до постоянной величины и подчиняется принципу аддитивности, то есть

$$\varphi = \sum_i \varphi_i \,. \tag{1}$$

Здесь φ - общий потенциал в рассматриваемой точке пространства в ситуации, когда имеется в рассматриваемой системе отсчета суперпозиция электростатических полей; φ_i - потенциал, который создается в этой же точке i - ым полем.

Известно, что потенциал электростатического поля, создаваемого точечным зарядом q в вакууме, описывается выражением

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|} \,. \tag{2}$$

Здесь q - величина заряда, ε_0- электрическая постоянная, $\vec{r}\,'$ и $\vec{r}$ - радиус-векторы точечного заряда и рассматриваемой точки соответственно. Напомним, что потенциал поля точечного заряда в бесконечно удаленной точке обычно считается равным нулю.

Любую электростатическую систему, разбивая мысленно ее на элементарные части, можно представить в виде ансамбля точечных зарядов. Таким образом, соотношения (1) и (2) должны быть инструментом в определении потенциала поля, создаваемого любой электростатической системой зарядов. Тогда значение потенциала ее поля в точке с радиус-вектором $\vec{r}$ будет описываться выражением

$$\varphi = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r} - \vec{r}\,'_i\right|} \,. \tag{3}$$

Здесь $\vec{r}\,'_i$ и q_i - радиус-вектор и величина i - ого точечного заряда или i - ой элементарной части системы соответственно. Напомним, что при непрерывном или кусочно-непрерывном распределении заряда по кривым, поверхностям, объемам, выражение (3) сводится к соответствующему интегрированию.

Остановимся теперь на известном соотношении

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \,. \tag{4}$$

Здесь $\vec{E}$ - вектор напряженности электростатического поля в рассматриваемой точке. При известном распределении электрического заряда в рассматриваемой системе его можно найти либо на основании принципа суперпозиции, либо, если возможно, то и с помощью теоремы Гаусса. Например, автор [1] отводит в своей книге отдельный параграф, посвященный нахождению потенциала по известной напряженности поля.

Если, например, речь идет об обобщенной системе координат с ортонормированным базисом $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, то равенство (4) эквивалентно системе дифференциальных уравнений в частных производных

$$-\frac{1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} = E_1, -\frac{1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial a_2} = E_2, -\frac{1}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial a_3} = E_3 \tag{5}$$

Здесь E_1, E_2, E_3- координаты вектора в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$; a_1, a_2, a_3 - обобщенные координаты рассматриваемой точки поля; h_1, h_2, h_3 - коэффициенты Ламе. Так как E_1, E_2, E_3 предполагаются известными, то интегрируя уравнения системы (5), можно найти и $\varphi= \varphi(a_1, a_2, a_3)$.

Пусть в некотором электростатическом поле, в каждой точке которого вектор $\vec{E}$ известен, выбраны точки P и P_0. Будем считать, что потенциал точки P_0 нам известен и равен φ_0. Тогда потенциал φ точки P на основании выражения (4) может быть записан в виде

$$\varphi = \varphi_0 - \int_{P_0}^{P} \vec{E}d\vec{r} \,. \tag{6}$$

В (6) вектор $d\vec{r}$ - элемент траектории, по которой мы мысленно переместились из P_0 в P. Направление $d\vec{r}$ совпадает с направлением нашего движения по траектории. Так как потенциал электростатического поля определяется с точностью до некоторой постоянной, то величину φ_0 можно положить равной и нулю. Часто в качестве точки P_0 обычно выбирают бесконечно удаленную точку, где считается $\varphi_0=0$.

Потенциал поля электростатической системы может быть найден и с помощью уравнения Пуассона

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}. \qquad (7)$$

Здесь Δ - оператор Лапласа, $\rho(\vec{r})$ - объемная плотность зарядов в точке с радиус-вектором $\vec{r}$. Если в некоторой области системы $\rho(\vec{r}) = 0$, то для нее (7) переходит в уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi=0. \qquad (8)$$

При необходимости объединения решений (7) и (8) учитывается непрерывность потенциала. Отметим, что, например, в [13] уравнения (7) и (8) используются для определения потенциала полей плоскопараллельного слоя и цилиндра, заряженного по объему.

Если электростатическая система имеет конечные размеры и величину электрического заряда, то нет ограничений для применения соотношений (3), (5) и (6), (7) и (8) при нахождении потенциала. При использовании указанных выражений могут возникнуть трудности. Но они всегда носят только расчетный характер.

Остановимся теперь на специфике применения соотношений (3), (5) и (6), (7) и (8) при нахождении потенциала полей абстрактных электростатических моделей. Начнем, например, с поля нити.

Поле нити мы будем описывать в цилиндрической системе координат. Пусть при этом ось Oz и нить совпадают. Рассмотрим точку с координатами r, θ, z. Здесь r - ее расстояние до оси Oz, θ - полярный угол. Из соображений симметрии следует, что потенциал поля в этой точке φ будет определяться только координатой r, то есть $\varphi = \varphi(r)$. Известно, что вектор напряженности поля нити описывается формулой

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r, \qquad (9)$$

где λ - линейная плотность заряда нити, $\vec{e}_r$ - единичный вектор, входящий в базисную тройку векторов рассматриваемой точки. На основании (5) и (9) получим уравнение $\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$. Выполнив элементарные вычисления, найдем хорошо известное выражение для потенциала поля нити

$$\varphi(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r + C, \qquad (10)$$

где C - постоянная интегрирования. Из (10) следует, если положить на бесконечности потенциал равным нулю, то $C=+\infty$ при $\lambda>0$. Когда $\lambda<0$, то $C=-\infty$. Это первая особенность в вопросе о потенциале поля нити. Она заставляет нас задуматься над тем, что можно ли в рассматриваемом случае потенциал в бесконечно удаленной точке считать равным нулю? В связи с этим Э.Парселл в [4] на стр. 59 пишет: «Очевидно, что в системе зарядов, распределенных до бесконечности, лучше расположить нулевой потенциал где-нибудь поближе». Конечно, это можно осуществить в связи с тем, что потенциал электростатического поля определяется с точностью до некоторой постоянной величины. Это можно оправдать и тем, что этот прием позволит получить такое выражение для потенциала поля нити, на основании которого соотношение (4) будет давать в любой точке правильный вектор напряженности поля. Однако, тем не менее, если для нити на бесконечности $r=\infty$ нельзя положить $\varphi=0$, то есть там, где $|\vec{E}| = 0$, что можно трактовать как отсутствие электрического поля при $r=\infty$, то почему так сходу можно считать $\varphi=0$ в точке, для которой $r \neq \infty$? Есть и такое мнение, что в случае названных выше абстрактных электростатических моделей на бесконечности находятся электрические заряды, то там нельзя считать потенциал равным нулю [1]. Но те же самые бесконечно удаленные заряды никаких помех не создают при нахождении вектора напряженности поля. Для всех указанных в работе моделей он либо в любой точке, либо практически всюду находится однозначно. Если для поля нити при $r = r_0$ можно считать, что потенциал $\varphi=0$, то

$$\varphi(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_0}. \qquad (11)$$

Остановимся теперь на равенстве (6). Пусть в нем P_0 - бесконечно удаленная точка, а точка P от нити находится на расстоянии равном r; φ_∞ - потенциал на бесконечности. Предположим, что точки P_0 и P лежат на одной из силовых линий поля. Тогда интегралу в (6) можно придать вид $\varphi(r) = \varphi_\infty + \int_r^\infty \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r'} dr'$. Здесь r` - переменная интегрирования. Итак, в величину $\varphi(r)$ входит несобственный интеграл первого рода. Легко убедиться, что в зависимости от знака λ, он равен $(\pm\infty)$. Для того, чтобы в точке P потенциал имел конечную величину необходимо, чтобы $\varphi_\infty = \mp\infty$. Однако на все это можно посмотреть под иным углом зрения, записав

$$\varphi(r) = \varphi_\infty + \lim_{R\to\infty} \int_r^R \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r'} dr' = \tag{12}$$
$$= \varphi_\infty - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln r + \lim_{R\to\infty} \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln R\right).$$

Из (12) видно, что вопрос о значении φ_∞ не так уж принципиален. Главное, что для любого r оно одинаково. Тоже самое можно сказать и о бесконечно большой величине $C = \lim_{R\to\infty} \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln R\right)$. Пусть, например, $C=+\infty$. При вычислении градиента $\varphi(r)$ в разности $\varphi(r+dr) - \varphi(r)$ возникнет неопределенность вида $(+\infty)-(+\infty)$. Но для любой точки поля нити C одно и тоже. Поэтому в нашем случае $(+\infty)-(+\infty)=0$. А $\nabla\left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln r\right)$ дает правильное выражение для вектора напряженности электростатического поля нити.

Рассмотрим теперь применение в нашем случае принципа аддитивности потенциала, то есть, по сути дела, соотношения (3). Если на практических занятиях по электростатике предложить студентам этим способом найти в произвольной точке поля, создаваемого бесконечной заряженной нитью, то на их лицах нередко можно увидеть неподдельное изумление, в момент, когда они убеждаются в том, что интеграл, к которому сводится сумма в (3) расходится. Их состояние понять нетрудно, так как на предыдущих занятиях применение принципа суперпозиции при нахождения вектора напряженности поля нити в заданной точке никаких проблем не создавало. Кстати, автор [3] также начинает рассмотрение потенциала поля нити с точки зрения принципа аддитивности потенциала. Вначале он, предполагая, что нить имеет конечную длину, находит потенциал ее поля в произвольной точке. После этого в полученном выражении длина нити устремляется к бесконечности. При этом в зависимости от знака λ потенциал поля в любой точке оказывается равным $(\pm\infty)$. На основании этого автор [3] на стр. 97 делает вывод, что в данной задаче, выражением (3), по сути дела, пользоваться нельзя. С этим, конечно, трудно согласиться. Ведь тем самым ставится под сомнение универсальность принципа аддитивности потенциала. С учетом линейности оператора ∇ выражение (4) предопределяет такое его свойство. Кроме того, если применить оператор $(-\nabla)$ к выражению (3), то мы получим $-\nabla\varphi = -\sum_i \nabla \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}\,'_i|} = \sum_i \vec{E}_i$, что соответствует принципу суперпозиции для напряженности электрического поля. Здесь $\vec{E}_i$ - напряженность электрического поля, создаваемого в рассматриваемой точке i - ым элементом нити. Поэтому, отменяя (3) , ставится под сомнение и принцип суперпозиции.

Пусть прямолинейный отрезок, заряженный равномерно с плотностью λ, имеет длину L. С помощью (3) находим, что потенциал в произвольной точке прямой, которая перпендикулярна отрезку и проходит через его центр, описывается выражением $\varphi(r) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{L + (L^2 + 4r^2)^{1/2}}{-L + (L^2 + 4r^2)^{1/2}}$. Здесь r - расстояние рассматриваемой точки до центра отрезка. Если $L \gg r$, то

$$\varphi(r) \approx -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln r + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln L. \tag{13}$$

Из (13) видно, что при $L\to\infty$ в зависимости от знака λ потенциал $\varphi(r)\to\pm\infty$. Глядя на выражение (13), все таки, надо согласиться с тем, что при $L\to\infty$ потенциал поля нити расходится во всех его точках. В принципе, не следует удивляться по этому поводу. Ведь хоть на какой-нибудь характеристике поля нити должно же сказываться то, что она безгранична и имеет бесконечно большой заряд? Тем более, что сходимость у рядов вида (3) более медленная, чем у рядов, которые можно построить для напряженности поля на основании принципа суперпозиции. В учебной литературе по электричеству и магнетизму, наверное, из-за расходимости ряда в правой части (3) этот метод для описания потенциала поля нити обычно не применяется. Однако, говоря образно, эту расходимость легко устранить, так как $C' = \lim_{L\to\infty} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln L$ одно и тоже для любого r. Выше такая ситуация уже обсуждалась, поэтому C' при переходе $L\to\infty$ может быть просто отброшено. При использовании в подобных задачах соотношений (5) - (8) (в равенстве (6) предполагается, что точка P_0 не является бесконечно удаленной) эта проблема снимается автоматически, а именно, при вычислении в них соответствующих разностей. Это создало иллюзию того, что выражения (5) - (8) являются более надежным инструментом для нахождения потенциала полей абстрактных электростатических систем, чем принцип аддитивности потенциала. Отбросив в соотношении (13) $(\lambda / 2\pi\varepsilon_0)\ln L$ мы придем к (11), считая в нем величину $r_0 = 1$м. Таким образом, с помощью принципа аддитивности потенциала также несложно получить правильное выражение для $\varphi(r)$ поля нити.

Если мы имеем цилиндр круглого сечения, который заряжен равномерно по поверхности или объему, то, согласно принципу суперпозиции его можем мысленно разбить на бесчисленное в пределе число полос, параллельных его оси. Эти полосы будут бесконечно узкими, поэтому их можно считать нитями. Также можно поступить и с заряженной плоскостью. Таким образом, заряженные цилиндры и плоскость сводятся к ансамблю нитей, а плоскопараллельный слой может быть представлен в виде совокупности либо плоскостей, либо нитей.

Можно ли уложить в пространстве бесконечную равномерно заряженную нить так, чтобы в любой точке ее поля модуль вектора напряженности был бесконечно большим? Пусть у нас есть прямоугольник $ABCD$ со сторонами $BC = a$ и $AB = 2a$ (Рис.1). Он на этом рисунке пунктирным отрезком NM поделен на два квадрата - $ANMD$ и $NBCM$. Прямоугольник $ABCD$ покрыт дорожкой, ширина которой равна b. Причем $a / b = n$, где n- большое четное число. Если теперь $b\to\infty$, то дорожка, покрывающая прямоугольник, будет иметь бесконечную длину. Тогда вдоль нее может быть выложена бесконечная нить. Она полностью покроет прямоугольник, причем ее половинки уложатся в квадратах $ANMD$ и $NBCM$. Такое покрытие возможно в связи с тем, что прямоугольник и нить являются множествами точек одинаковой мощности, то есть мощности континуума. Таким образом, прямоугольник $ABCD$ будет иметь бесконечный заряд, сосредоточенный в ограниченной области плоскости. Ясно, что в любой точке вне прямоугольника напряженность электрического поля будет бесконечной. Наверное, на основании этого примера можно утверждать, если равномерно заряженная нить уложена в пространстве так, что любая замкнутая поверхность, которая прокалывается нитью, содержит конечной величины заряд, то вектор напряженности поля в любой точке вне нити может быть определен.

Учитывая то, что данная научно-методическая работа рассчитана, в том числе и на студентов, уделим некоторое внимание и потенциалу поля бесконечной плоскости.

Вначале его найдем, разбивая плоскость не на нити, а на узкие концентрические кольца относительно некоторой ее точки O. С началом в ней проведем ось Ox перпендикулярно плоскости. Пусть поверхностная плотность заряда плоскости равна σ. Рассмотрим кольцо радиуса r и ширины dr. В точке, лежащей на оси Ox, его заряд создает потенциал $d\varphi = \frac{\sigma r}{2\varepsilon_0 (r^2 + x^2)^{1/2}} dr$. Вначале выполним интегрирование, считая, что r изменяется в пределах от 0 до R. Тогда получим

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[(R^2 + x^2)^{1/2} - |x|\right]. \qquad (14)$$

Из (14) следует, что при $R >> |x|$,

$$\varphi \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(R - |x|) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|x| + C_1, \qquad (15)$$

где $C_1 = \sigma R / 2\varepsilon_0$ - постоянная величина, одинаковая для всех x при $R >> |x|$. По этой причине в равенстве (15) она может быть отброшена. Тогда потенциалом плоскости следует считать выражение $\varphi = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|x|$.

Можно рассуждать и по иному, заметив, что $C = \lim_{R\to\infty} C_1 = \pm\infty$, то есть потенциал в любой точке поля плоскости расходится. Однако при нахождении вектора напряженности поля в разности $\varphi(x+dx)-\varphi(x)$будет присутствовать и неопределенность $(\pm\infty)-(\pm\infty)$. Но C одинаково для любого x, то есть $(\pm\infty)-(\pm\infty)=0$. Поэтому удаление из (15) C_1 следует признать обоснованным. Итак, на основании (3) также легко найти выражение для потенциала поля плоскости.

Рассмотрим теперь ее поле с помощью уравнений (7) и (8). Из соображений симметрии следует, что φ зависит только от координаты x. Тогда (8) при $x \neq 0$ примет вид $d^2\varphi/dx^2=0$. Отсюда следует, что φ линейно зависит от x, а с обеих сторон плоскости ее поле является однородным. Однако, если сообразить, что в (7) $\rho(\vec{r}) = \sigma\,\delta(x)$, где $\delta(x)$ - δ - функция Дирака. Тогда (7) примет

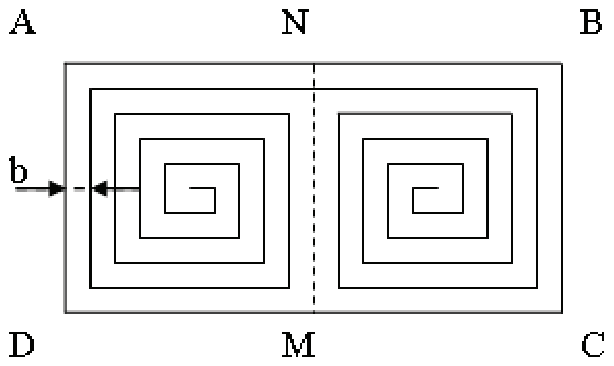

Рис.1. Дорожка ширины b, покрывающая прямоугольник ABCD, у которого AB=2a, BC=a (a / b = n - большое четное число).

вид $$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\delta(x)\cdot$$ и

$\frac{d\varphi(x)}{dx} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_{-x}^{x}\delta(x')dx' = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Здесь учтено, что $(-x \leq x` \leq x)$ и производная $d\varphi(x)/dx$ является нечетной функцией координаты x. Она у нас записана для $x>0$. Если $x<0$, то $d\varphi(x)/dx = \sigma/\varepsilon_0$. Теперь легко найти и $\varphi(x)$. Кстати, для тех, кто знаком с функциями Грина, явный вид выражения $\varphi(x)$ очевиден, так как уравнение (7) при $\rho(\vec{r}) = \sigma\,\delta(x)$ является определением функции Грина в нашей задаче.

1. Д.В.Сивухин. Одщий курс физики, Т.3, ФИЗМАТЛИТ, изд-во МФТИ, М.(2004), 656 с.
2. И.В.Савельев. Курс общей физики, Т.2, изд-во «Лань», М.(2006), 496с.
3. А.Н.Матвеев. Электричество и магнетизм, Высш. школа, М.(1983), 463с.
4. Э.Парселл. Электричество и магнетизм, Главная редакция физико-математической литературы ид-ва «Наука», М.(1975), 440с.
5. Г.Е.Зильберман. Электричество и магнетизм, Издательство «Наука», М.(1970), 384с.
6. И.Е.Тамм. Основы теории электричества, Наука, глав. ред. физ.-мат. лит-ры, М.(1989), 504 с.
7. А.И.Ахиезер, И.А.Ахиезер. Электромагнетизм и электромагнитные волны, Высш.шк., М.(1985), 504с.
8. Р.Фейнман, Р.Лейтон, М.Сэндс. Фейнмановские лекции по физике.Электричество и магнетизм, Т.5, Издательство «Мир», М.(1977), 300с.
9. С.Г.Калашников. Электричество, Наука, глав. ред. физ.-мат. литературы, М.(1985), 576 с.
10. С.Э.Фриш, А.В.Тиморева. Курс общей физики, Т.2, изд-во «Лань», М.(2006), 526 с.
11. Т.И.Трофимова. Курс физики, «Высшая школа», М.(2008), 560 с.
12. И.Е.Иродов. Задачи по общей физике, Лаборатория Базових знаний, М.(2003),432с.
13. А.Н.Матвеев. Электродинамика, Высш. школа, М.(1980), 383с.
14. І.М.Кучерук, І.Т.Горбачук, П.П.Луцик. Загальний курс фізики. Електрика і магнетизм, Т.2, «Техніка», К.(2006), 454с.
15. В.В.Кармазін, В.В.Семенець. Курс загальної фізики, Кондор, К.(2009), 786с.
16. І.Р.Зачек, І.М.Кравчук, Б.М.Романишин, В.М.Габа, Ф.М.Гончар. Курс фізики, Видавництво «Бескид Біт», Львів(2002), 376с.
17. Е.М.Гершензон, Н.Н.Малев. Курс общей физики. Электричество и магнетизм, Просвещение, М.(1980), 223с.
18. В.А.Говорков. Электрическое и магнитное поле, «Энергия», М.(1968), 446с.
19. Л.Д.Гольдштейн, Н.В.Зернов. Электромагнитные поля и волны, Изд-во «Советское радио», М.(1976), 664с.
20. И.Е.Иродов. Основные законы электромагнетизма, Высш. шк., М.(1983), 279с.
21. Д.Джанколи. Физика, Т.2, Мир, М.(1989), 667с.
22. А.А.Детлаф, Б.М.Яворский. Курс физики, Высш. шк., М.(1989), 608с.
23. Г.А.Зисман, О.М.Тодес. Курс общей физики. Электричество и магнетизм, часть II, «Дніпро», К.(1994), 382с.