

УДК: 538.915, 538.953, 538.975

PACS: 71.10.Pm, 72.10.-d, 72.15.Lh, 73.20.Qt, 73.21.Nb.

Теплопроводность одномерного вигнеровского кристалла

С. С. Апостолов

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,

Украина, 61077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Институт радиофизики и электроники имени А.Я. Усикова НАН Украины

Украина, 61085, г. Харьков, ул. Академика Проскуры, 12

В работе рассмотрен квантовый провод, электроны в котором формируют одномерный вигнеровский кристалл. Одномерные электроны в таком кристалле эквивалентны системе плазмонных мод, описывающих длинноволновые колебания зарядовой плотности. В работе предложена модель теплового транспорта в одномерном вигнеровском кристалле с учётом столкновений плазмонов. В рамках этой модели вычислена теплопроводность квантового провода.

Ключевые слова: одномерный вигнеровский кристалл, плазменные волны, интеграл столкновений, теплопроводность.

У роботі розглянуто квантовий дріт, електрони в якому формують одновимірний вигнерівський кристал. Одновимірні електрони в такому кристалі еквівалентні системі плазмонних мод, що описують довгохвильові коливання зарядової щільності. У роботі запропонована модель теплового транспорту в одновимірному вигнерівському кристалі з урахуванням зіткнень плазмонів. У рамках цієї моделі обчислена теплопровідність квантового дроту.

Ключові слова: одновимірний вигнерівський кристал, плазмові хвилі, інтеграл зіткнень, теплопровідність.

We consider a quantum wire with electrons forming a one-dimensional Wigner crystal. The one-dimensional electrons in the crystal are equivalent to a system of plasmon modes describing the long-wave oscillations of the charge density. In this paper a model of thermal transport in one-dimensional Wigner crystal taking into account collisions of the plasmon, is offered. Under this model, the thermal conductance of a quantum wire is calculated.

Keywords: one-dimensional Wigner crystal, plasma waves, the collision integral, thermal conductance.

Введение

Одним из ключевых направлений современных исследований является кинетика почти точно решаемых квантовых многочастичных систем. С этой точки зрения одномерные (1D) системы особенно актуальны, поскольку для них известны некоторые точные решения [1–2], и их можно использовать для решения более общих моделей, в которых интегрируемость нарушается слабо. Интегрируемость гарантирует, что рассеяние частиц в 1D многочастичной системе в точности эквивалентно последовательности столкновений пар частиц и, следовательно, множество начальных импульсов для любого акта рассеяния совпадает с множеством конечных импульсов. Такие рассеяния не изменяют функцию распределения и не могут приводить систему к тепловому равновесию. Ярким примером таких долгоживущих неравновесных квантовых состояний может служить квантовый маятник Ньютона, созданный с помощью 1D-бозе-газа в ловушке [3].

Для описания 1D электронных жидкостей

и кристаллов, которые образуются в квантовых проволоках, нанотрубках и краевых состояниях, может быть использована точно решаемая модель Томонаги–Латтинжера [4–6]. Эта модель предсказывает особые свойства 1D электронных систем: степенные аномалии в туннельной плотности состояний [7] и эффект разделения заряда и спина [8]. Тем не менее, данная модель обладает некоторыми серьезными недостатками, в частности, в рамках этой модели возбуждения имеют бесконечное время жизни, что подразумевает отсутствие равновесия.

Возобновление интереса к 1D электронным жидкостям и кристаллам объясняется новыми экспериментальными результатами, которые не вписываются в парадигму модели Томонаги–Латтинжера. Туннельная спектроскопия квантовых проводов [9,10] и термометрия квантовых краевых состояний [11,12] представляют прямое доказательство установления теплового равновесия в 1D электронных системах. Также обнаружены отклонения от идеального квантования проводимости [13–17] и нарушение

закона Видемана–Франца [18,19] в проводях с низкой электронной плотностью. Эти наблюдения привлекли значительное внимание и требуют построения новой теоретической модели. В данной работе мы изучаем микроскопические механизмы релаксации и передачу энергии в 1D электронном кристалле, основываясь на ангармонических взаимодействиях между плазмонами.

Исследование теплового транспорта в 1D электронной жидкости было начато Кейном и Фишером [20] Они пришли к выводу, что в чистой жидкости тепловая проводимость K не зависит от взаимодействия и совпадает со своим невзаимодействующим значением $K_0 = 2\pi^2 T/3h$, а также справедлив закон Видемана–Франца с числом Лоренца $\mathcal{L}_0 = \pi^2/3e^2$. В присутствии примесей сильное обратное рассеяние электронов изменяет тепловую и электрическую проводимость так, что $\mathcal{L}/\mathcal{L}_0 = 3/(2\kappa + \kappa^2)$ для параметра взаимодействия $1/2 < \kappa < 1$, и число Лоренца расходуется $\mathcal{L} \propto T^{4-2/\kappa}$ при $T \rightarrow 0$ для $\kappa < 1/2$. Также существенное нарушение закона Видемана–Франца было предсказано для неупорядоченного электронного кристалла, когда скорость процесса переброса превышает скорость рассеяния на примесях [21].

В рамках модели неоднородной электронной жидкости, где параметр взаимодействия $\kappa(x)$ зависит от пространственной координаты, в работах [22,23] было показано, что если $\kappa(x)$ плавно меняется в масштабе длины волны Ферми, то электроны не претерпевают обратного рассеяния, и проводимость равна $G_0 = 2e^2/h$. Тем не менее, плазмоны, представляющие низкоэнергетические возбуждения в кристалле, претерпевают обратное рассеяние, которое сильно изменяет K .

Стоит обратить внимание, что ангармонические поправки в гамильтониане кристалла, которыми пренебрегают в модели Томонаги–Латтинжера, могут также привести к взаимодействию и рассеянию плазмонов. Влияние этого механизма рассеяния на кинетику плазмонов существенно отличается от описанных выше. Действительно, в системе, в которой отсутствует трансляционная инвариантность, импульс не сохраняется за счёт рассеяния на неоднородности, но это не приводит к тепловому равновесию. В данной работе мы вычисляем теплопроводность участка однородного 1D вигнеровского кристалла с рассеянием плазмонов за счет ангармоничности.

Модель

В этом разделе мы предполагаем, что данная электронная система представляет собой 1D вигнеровский кристалл [24,25]. Такой кристалл, возникающий в нанотрубках [26] и квантовых

проводах [27,28], представляет предельный случай 1D электронной жидкости с параметром взаимодействия $\kappa = \pi\hbar n^2/ms \ll 1$, где n – концентрация электронов, m – масса электронов, s – скорость плазмонов. При нулевой температуре сдвиг вигнеровского кристалла как целого приводит к проводимости \mathcal{G}_0 . При конечной температуре плазменные волны существенно не влияют на электрический транспорт, поскольку вычисление поправок требует процессов переброса, которые при низких температурах экспоненциально малы. Однако рассеяние плазмонов может заметно влиять на тепловой транспорт.

Следуя недавней работе [29], мы моделируем нашу систему гамильтонианом сильновзаимодействующих бесспиновых электронов (здесь и далее мы считаем $\hbar = 1$):

$$H = \sum_l \frac{p_l^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{l \neq l'} U(x_l - x_{l'}), \quad (1)$$

где p_l и x_l – импульс и координата l -го электрона ($l=1, \dots, N$), и $U(x)$ – потенциал взаимодействия. В дальнейших вычислениях под $U(x)$ мы подразумеваем экранированный кулоновский потенциал

$$U(x) = \frac{e^2}{\epsilon} \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4d^2}} \right), \quad (2)$$

где d – расстояние до экрана и ϵ – диэлектрическая проницаемость материала. В этой модели состояние вигнеровского кристалла существует [29] при условии $a_B/d^2 \ll n \ll a_B^{-1}$, где $a_B = \epsilon/me^2$ – эффективный борковский радиус в материале. Электроны в вигнеровском кристалле формируют решётку и их движение удобно описывать отклонением $\xi_l = x_l - l/n$ относительно их положений равновесия в этой решётке. Предполагая, что эти отклонения малы, $|\xi_l - \xi_{l'}| \ll |l - l'|/n$, и раскладывая гамильтониан (1) до второго порядка по ξ_l , мы приходим к обычному выражению для системы невзаимодействующих осцилляторов:

$$H_0 = \sum_k \omega_k (b_k^\dagger b_k + 1/2).$$

Здесь частота плазмонов ω_k определяется следующим соотношением:

$$\omega_k^2 = \frac{2}{m} \sum_l V''(x = l/n) [1 - \cos(kl/n)],$$

а их операторы уничтожения b_k и рождения b_k^\dagger связаны с импульсами и координатами электронов стандартным

образом:

$$p_l = -i \sum_k \sqrt{\frac{m\omega_k}{2nL}} (b_k - b_{-k}^\dagger) e^{ikl/n},$$

$$u_l = \sum_k \sqrt{\frac{1}{2mnL\omega_k}} (b_k + b_{-k}^\dagger) e^{ikl/n},$$

где L – длина провода, в котором формируется вигнеровский кристалл. В пределе малых импульсов частота может быть разложена до первого нелинейного слагаемого:

$$\omega_k = s |k| (1 - \alpha k^2), \quad (3)$$

где s – скорость плазмонов, а α – коэффициент, зависящие от типа потенциала взаимодействия. В частности, $s = (e^2 n^2 / \varepsilon) \sqrt{2na_B \ln(nd)}$ и $\alpha = d^2 \ln(s/T) / 2 \ln(nd)$ для экранированного кулоновского потенциала (2).

Установление теплового равновесия

Учёт ангармонических членов третьего H_3 и четвёртого H_4 порядка по ξ_l в гамильтониане (1) приводит к двухплазмонным процессам рассеяния, скорость которых $W_{k_1 k_2}^{k'_1 k'_2}$ может быть вычислена с помощью золотого правила Ферми

$$W_{k_1 k_2}^{k'_1 k'_2} = 2\pi |\langle k'_1, k'_2 | T | k_1, k_2 \rangle|^2 \delta(\omega' - \omega),$$

где $\omega = \omega_{k_1} + \omega_{k_2}$ и $\omega' = \omega_{k'_1} + \omega_{k'_2}$, а трансляционный оператор T выражается через ангармонические члены следующим образом:

$$T = H_4 + H_3(\omega - H_0)^{-1} H_3.$$

В предположении, что характерные импульсы плазмонов малы, скорость рассеяния принимает достаточно простой вид [29]:

$$W_{k_1 k_2}^{k'_1 k'_2} = \frac{2\pi\lambda^2}{m^2 n^2 L^2} |k_1 k_2 k'_1 k'_2| \delta_{k_1+k_2, k'_1+k'_2} \delta(\omega - \omega'), \quad (4)$$

где λ – числовой параметр, зависящий от потенциала взаимодействия $U(x)$. В частности, $\lambda = 3/4$ для экранированного кулоновского потенциала (2). Обратим внимание, что при выводе уравнения (4) существенную роль играет учёт нелинейности дисперсионного соотношения (3) для плазмонов при малых импульсах.

Уравнение (4) описывает столкновения, при которых пара плазмонов, двигающихся в одном направлении, рассеивается в пару плазмонов, двигающихся в разных направлениях (см. рис. 1). Например, пусть плазмоны с импульсами k_1 и k_2 двигаются вправо, то есть эти импульсы положительны. Тогда законы сохранения энергии и импульса (представленные в уравнении (4) через δ -функции)

определяют импульсы плазмонов после рассеяния

$$k'_1 = k_1 + k_2 - k'_2, \quad k'_2 = -\frac{3}{2} \alpha k_1 k_2 (k_1 + k_2), \quad (5)$$

где α – коэффициент из уравнения (3). Из уравнений (5) следует, что плазмон с импульсом k'_1 также движется вправо, а плазмон с импульсом k'_2 – влево. Более того, при низких температурах импульс k'_2 оказывается существенно меньше остальных трёх импульсов, поскольку если $\{k_1, k_2, k'_1\} \sim T/s$, то $k'_2 \sim \alpha(T/s)^3$. Таким образом, данный процесс рассеяния приводит к установлению теплового равновесия, но при этом перераспределение энергии между правобегущими и левобегущими плазмонами происходит существенно медленнее, чем внутри каждой ветви спектра по отдельности.

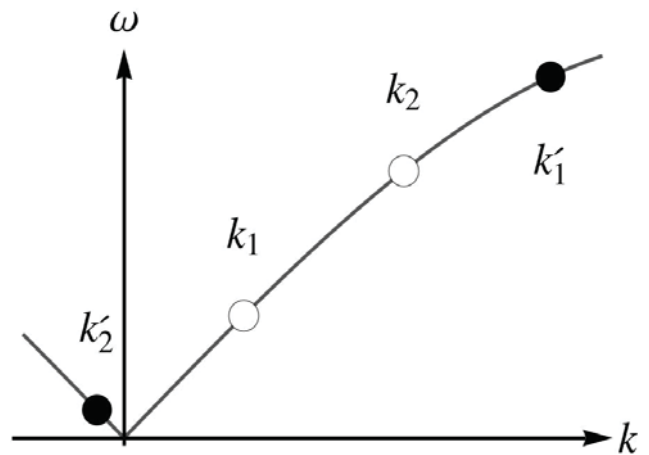


Рис. 1. Процесс рассеяния правобегущих плазмонов k_1 и k_2 (белые точки) в правобегущий плазмон k'_1 и левобегущий плазмон k'_2 (черные точки), представленный на дисперсионной кривой ω_k задаваемой уравнением (3).

В дальнейшем решении мы считаем, что отдельно для право/левобегущих плазмонов теплое равновесие устанавливается достаточно быстро, поэтому мы можем представить функцию распределения плазмонов по импульсам в виде

$$N_k = \theta(k) N_k^R + \theta(-k) N_k^L, \quad (6a)$$

где для обеих ветвей спектра мы рассматриваем равновесные функции распределения $N_k^{R/L}$:

$$N_k^{R/L} = \left\{ \exp\left[(\omega_k - s^{R/L} k) / T^{R/L} \right] - 1 \right\}^{-1}. \quad (6b)$$

Однако теплое равновесие между правобегущими и левобегущими плазмонами устанавливается медленно, следовательно, для плазмонов из разных ветвей спектра могут быть разные дрейфовые скорости $s^{R/L}$ и эффективные температуры $T^{R/L}$. Заметим, что аналогичный подход

был использован в работах [30,31] при изучении теплового транспорта в слабозаимодействующих электронных системах.

Теплопроводность

Рассмотрим участок длины L квантового провода, в котором формируется вигнеровский кристалл. Пусть провод слева и справа от этого участка поддерживается при температурах $T + \delta T/2$ и $T - \delta T/2$, соответственно (см. рис. 2). Для того, чтобы вычислить теплопроводность рассматриваемого участка, нужно разделить поток тепловой энергии J , переносимой плазмонами, на разницу температур $\delta T \ll T$, то есть $K = J / \delta T$. С этой целью мы введём в рассмотрение потоки энергии $J^{R/L}$ и импульса $I^{R/L}$ отдельно для право/левобегающих плазмонов:

$$\begin{aligned} J^{R/L} &= \sum_k s_k \omega_k \theta(\pm k) (N_k - n_k), \\ I^{R/L} &= \sum_k s_k k \theta(\pm k) (N_k - n_k), \end{aligned} \quad (7)$$

где $n_k = [\exp(\omega_k/T) - 1]^{-1}$ – равновесная функция распределения Бозе, а $s_k = \partial \omega_k / \partial k$ – скорость плазмонов с импульсом k .

Полные потоки энергии и импульса вдоль провода остаются постоянными:

$$\partial(J^R + J^L) / \partial x = 0, \quad \partial(I^R + I^L) / \partial x = 0. \quad (8a)$$

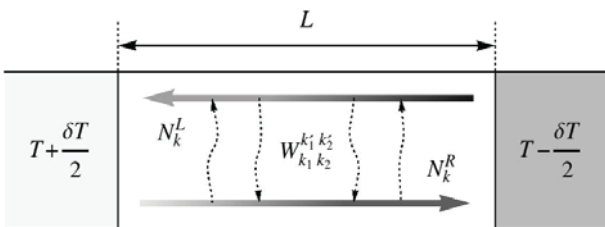


Рис. 2. Схематическое изображение 1D квантового провода, края которого поддерживаются при температурах $T + \delta T/2$ и $T - \delta T/2$. Право/левобегающие плазмоны с функцией распределения $N_k^{R/L}$ (градиентные стрелки) рассеиваются друг на друге со скоростью $W_{k_1 k_2}^{k_1' k_2'}$ (штриховые стрелки).

В то же время за счёт рассеяния плазмонов происходит передача энергии и импульса между право/левобегающими плазмонами:

$$\partial(J^R - J^L) / \partial x = E, \quad \partial(I^R - I^L) / \partial x = P, \quad (8b)$$

где E и P – скорости передачи энергии и импульса, определяемые скоростью рассеяния (4):

$$\begin{aligned} E &= 2 \sum_{k_1 k_2 k_1' k_2'} \omega_{k_2} W_{k_1 k_2}^{k_1' k_2'} (\mathcal{N}_{k_1 k_2}^{k_1' k_2'} - \mathcal{N}_{k_1' k_2'}^{k_1 k_2}), \\ P &= 2 \sum_{k_1 k_2 k_1' k_2'} k_2' W_{k_1 k_2}^{k_1' k_2'} (\mathcal{N}_{k_1 k_2}^{k_1' k_2'} - \mathcal{N}_{k_1' k_2'}^{k_1 k_2}), \\ \mathcal{N}_{k_1 k_2}^{k_1' k_2'} &= N_{k_1} N_{k_2} (1 + N_{k_1'})(1 + N_{k_2'}). \end{aligned} \quad (9)$$

Далее мы перепишем уравнения (8) в терминах дрейфовых скоростей и эффективных температур. Для этого подставим в уравнения (7-9) функцию распределения (6) и разложим в предположении линейного отклика:

$$\sigma^{R/L} = s^{R/L} / s \ll 1, \quad \tau^{R/L} = (T^{R/L} - T) / T \ll 1.$$

В результате получим систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \tau_+' + \beta_+ \sigma_+' &= 0, \quad \tau_-' + \beta_- \sigma_-' = 0, \\ \tau_+' + \beta_- \sigma_-' &= -\tau_-, \quad \tau_-' + \beta_+ \sigma_+' = -\sigma_-. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $\tau_{\pm} = \tau^R \pm \tau^L$ и $\sigma_{\pm} = \sigma^R \pm \sigma^L$, и под штрихом понимается производная по координате x/l_c , нормированной на характерную длину:

$$l_c^{-1} = \frac{3}{\pi T^3} \sum_{k_1 k_2 k_1' k_2'} \omega_{k_2}^2 W_{k_1 k_2}^{k_1' k_2'} n_{k_1} n_{k_2} (1 - n_{k_1'}) (1 - n_{k_2'}),$$

и введены константы

$$\beta_{\pm} = 1 \pm \frac{\gamma}{5} + \frac{(25 \pm 186)\gamma^2}{350}, \quad \gamma = \frac{2(\pi T n d)^2}{s^2 \ln(nd)} \ln \frac{s}{T}.$$

Чтобы найти решение системы (10), необходимо добавить граничные условия. Предполагая, что функция распределения плазмонов в тех частях провода, где поддерживается фиксированная температура, является равновесной, мы можем записать такие граничные условия:

$$\begin{aligned} s^R |_{x=-L/2} &= s^L |_{x=L/2} = 0, \\ (T^R - T) |_{x=-L/2} &= (T - T^L) |_{x=L/2} = \delta T / 2. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнения (11) говорят о том, что плазмоны, вбегающие в рассматриваемый участок длины L , имеют нулевые дрейфовые скорости, а их эффективные температуры равны внешним фиксированным температурам.

Теперь мы можем найти аналитическое решение уравнений (10-11) и вычислить теплопроводность:

$$\frac{K}{K_0} = 1 - \frac{36(\pi T n d)^4 \ln^2(T/s)}{175s^4 \ln^2(nd)} (1 - e^{-L/l_c}), \quad (12)$$

где

$$l_c^{-1} = (\beta_+ \beta_- - 1)^{-1} l_c^{-1} = C_U \kappa^2 (T/s)^5. \quad (13)$$

Здесь константа C_U зависит от потенциала взаимодействия $U(x)$ между электронами, и $C_U \approx 4.28$ для экранированного кулоновского потенциала (2). Выражение (12) для теплопроводности K верно не

только для достаточно длинных проводов, когда поправочное слагаемое экспоненциально мало, но и для относительно коротких проводов, если $n^{-1} \ll L \ll l_K$. Обратим внимание, что характерная длина l_K , определяемая выражением (13), связана со временем рассеяния плазмонов $t_{sc}^{-1} \sim l_{sc}^{-1} \propto T^5$, что находится в согласии с результатами, полученными в работе [29].

Заключение

В настоящей работе представлена модель, описывающая тепловой транспорт в одномерном вигнеровском кристалле, который формируется в квантовом проводе. За счет специфического процесса рассеяния установление теплового равновесия между правобегущими и левобегущими плазмонами происходит значительно медленнее, чем внутри каждой из ветвей спектра. Эта модель позволяет существенно упростить решение, и в работе вычислена теплопроводность участка провода произвольной длины.

1. D.C. Mattis. The Many-Body Problem: An Encyclopedia of Exactly Solved Models in One Dimension, World Scientific Publishing (1993), 984 p.
2. B. Sutherland. Beautiful models: 70 years of exactly solved quantum many-body problems, World Scientific Publishing (2004), 400 p.
3. T. Kinoshita, T. Wenger, D. Weiss. Nature, 440, 900 (2006).
4. S. Tomonaga. Prog. Theor. Phys., 5, 544 (1950).
5. J.M. Luttinger. J. Math. Phys., 4, 1154 (1963).
6. V.V. Deshpande et al. Nature, 464, 209 (2010).
7. L. Venkataraman, Y.S. Hong, P. Kim, Phys. Rev. Lett., 96, 076601 (2006).
8. O.M. Auslaender et al. Science, 308, 88 (2005).
9. Y.-F. Chen et al. Phys. Rev. Lett., 102, 036804 (2009).
10. G. Barak et al. Nat. Phys., 6, 489 (2010).
11. G. Granger, J.P. Eisenstein, J.L. Reno. Phys. Rev. Lett., 102, 086803 (2009).
12. C. Altimiras et al. Nat. Phys., 6, 34 (2010).
13. K.J. Thomas et al. Phys. Rev. Lett., 77, 135 (1996); Phys. Rev., B58, 4846 (1998).
14. A. Kristensen et al. Phys. Rev., B62, 10950 (2000).
15. S.M. Cronenwett et al. Phys. Rev. Lett., 88, 226805 (2002).
16. D.J. Reilly et al. Phys. Rev., B63, 121311(R) (2001).
17. R. Crook et al. Science, 312, 1359 (2006).
18. O. Chiatti et al. Phys. Rev. Lett., 97, 056601 (2006).
19. N. Wakeham et al. Nat. Commun., 2, 396 (2011).
20. C.L. Kane, M.P.A. Fisher. Phys. Rev. Lett., 76, 3192 (1996).
21. A. Garg et al. Phys. Rev. Lett., 103, 096402 (2009).
22. I.V. Krive. ФНТ, 24, 498 (1998).
23. D.B. Gutman, Y. Gefen, A.D. Mirlin. Phys. Rev., B80, 045106 (2009).
24. H.J. Schulz. Phys. Rev. Lett., 71, 1864 (1993).
25. K.A. Matveev. Phys. Rev., B70, 245319 (2004).
26. V.V. Deshpande, M. Bockrath. Nat. Phys., 4, 314 (2008).
27. W.K. Hew et al. Phys. Rev. Lett., 102, 056804 (2009).
28. M. Yamamoto et al. Phys. Rev., B85, 041308(R) (2012).
29. J. Lin, K.A. Matveev, and M. Pustilnik. Phys. Rev. Lett., 110, 016401 (2013).
30. A. Levchenko et al. Phys. Rev., B84, 115447 (2011).
31. T. Micklitz, A. Levchenko. Phys. Rev. Lett., 106, 196402 (2011).