Вісник ХНУ, № 865, серія «Фізика», вип. 12, 2009. с. 62 - 67

УДК 530.122

Анализ обобщения теории гравитации высших степеней кривизны

А.Т. Котвицкий[1], Д.В. Крючков[2]

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,
61077, г. Харьков, пл. Свободы, 4
E-mail: kotvytskiy@gmail.com[1], kryuchkov_dm@mail.ru[2]

В работе проводиться анализ ранее полученного обобщения для теории гравитации высших степеней тензора кривизны на предмет его применения для построения различных частных вариантов моделей гравитации. Осуществляется ознакомление с результатом полученного обобщения. Далее исследуются частные случаи вытекающие из имеющегося обобщения, строятся уравнения гравитационного поля для известных моделей: для квадратичной модели, для $f(R)$ и $f\left(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}\right)$ модели, а также выводятся уравнения для некоторых форм действий не рассматриваемых ранее.

Ключевые слова: действие, расширенная гравитация, квадратичная гравитация, лагранжиан, тензор Римана, тензор Эйнштейна.

Виконується аналіз раніше отриманого узагальнення для теорії гравітації вищих ступенів тензора кривизни на предмет його застосування для будування різноманітних варіантів моделей гравітації. Здійснюється ознайомлення з результатами отриманого узагальнення. Далі досліджуються окремі випадки розглянутого узагальнення, будуються рівняння гравітаційного поля для відомих моделей: квадратичної, $f(R)$, $f\left(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}\right)$ моделей, а також заходжуються рівняння для деяких форм гравітаційних дій не розглянутих раніше.

Ключові слова: дія, розширена гравітація, квадратична гравітація, лагранжіан, тензор Рімана, тензор Ейнштейна.

In the work the earlier received generalization of gravity theory of higher order of curvature is analyzed for constructions of various variants of gravity models. The results of the received generalization are presented. The special cases of the generalization are investigated. The gravitation field equations are build for some models. There are quadratic, $f(R)$, $f\left(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}\right)$ and some new models of gravity.

Key words: action, extended gravitation, quadratic gravitation, Lagrange's density, Riemann tensor, Einstein tensor.

В настоящее время общая теория относительности считается наиболее практичной теорией для описания гравитационного взаимодействия. Она разрешает недостатки ньютоновской гравитации и хорошо соответствует всем экспериментам, проводимым как в лабораториях так и на уровне Солнечной системы [1,2]. Однако за последнее десятилетие появилось определённое количество фактов, дающих основание полагать, что общая теория относительности (теория относительности Эйнштейна) может быть не полной. В частности, трудности появляются при попытке объединения ОТО с квантовой теорией, а так же последние данные об ускоренном расширении вселенной. Это всё говорит о том, что некоторые аспекты гравитационного взаимодействия нам пока неизвестны.

Именно поэтому очень много усилий было направленно на исследование обобщений теории Эйнштейна и в особенности на так называемую Расширенную Теорию Гравитации (Extended Theory of Gravitation - ETG).

Одним и самых интересных классов ETG является теория нелинейной гравитации или теория гравитации более высокого порядка (высших степеней тензора кривизны). В основе этой теории лежит гравитационное действие нелинейное по скалярной кривизне и содержащее слагаемые различных степеней кривизны (модели гравитации, основанные на подобном действии относится к типу $f\left(R_{\alpha\beta\gamma\delta}\right)$).

Слагаемые высших степеней кривизны возникаю во многих разделах теоретической физики. Например, как показано в [3], для квантовой теории поля в искривлённом пространстве-времени перенормировка тензора энергии-импульса подразумевает введение в гравитационное действие поправок высших степеней кривизны. Кроме того, в низко энергетическом пределе 10-мерной теорий суперструн также возникают поправки высших степеней кривизны к действию Гильберта-Эйнштейна [4,5,6]. Также скаляры кривизны высших степеней являются неотъемлемой частью Теории Великого Объединения в частности при анализе вакуумного действия [7]. Перечисленные аспекты говорят об актуальности исследований теории гравитации высших степеней кривизны.

В данной работе будут изучены частные случаи полученного ранее обобщения для теории гравитации высших степеней кривизны (тип $f\left(R_{\alpha\beta\gamma\delta}\right)$).

ОБОБЩАЮЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ГРАВИТАЦИИ ТИПА $f\left(R_{\alpha\beta\gamma\delta}\right)$

В работе [8] было получено уравнение обобщающее теорию гравитации высших степеней кривизны. В качестве гравитационного действия было принято

$$S_g = \int f\sqrt{-g}\, d^4x\,, \tag{1}$$

где $f = f\left(R_{\alpha\beta\gamma\delta}\right)$– произвольная скалярная функция, зависящая от различных скаляров кривизны различных степеней. В самом общем случае функция f может быть построена из следующих тензоров:

$R_{\alpha\nu\sigma\rho}$ - тензор Римана;

$\delta^{\varepsilon}_{\beta}$ - символ Кронекера; $g^{\lambda\chi}$ - метрический тензор;

$E^{\alpha\beta\gamma\delta} = \dfrac{e^{\alpha\beta\gamma\delta}}{\sqrt{-g}}$ - тензор Леви-Чивита.

Полученное уравнение поля и ограничивающее условие:

$$\Xi_{\lambda\chi} = \frac{8\pi k_g}{c^4} T_{\lambda\chi}\,, \tag{2}$$

$$\Xi_{\lambda\chi}{}^{;\lambda} = 0\,, \tag{3}$$

где c – скорость света, k_g - гравитационная постоянная,

$$\begin{gathered}\Xi_{\lambda\chi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial R_{\alpha\nu\sigma\rho}}\right]_{;\tau\gamma} g_{\alpha\mu}\Delta^{\mu\tau\gamma}_{\nu\sigma\rho(\lambda\chi)} - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial R_{\alpha\nu\sigma\rho}}\times \\ \times\left(g_{\alpha\lambda}R_{\chi\nu\sigma\rho} + g_{\alpha\chi}R_{\lambda\nu\sigma\rho}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial E^{\alpha\beta\gamma\delta}}E^{\alpha\beta\gamma\delta}g_{\lambda\chi} + \\ + \frac{\partial f}{\partial g^{\lambda\chi}} - \frac{1}{2} f g_{\lambda\chi}\end{gathered} \tag{4}$$

либо

$$\begin{gathered}\Xi_{\lambda\chi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial R_{\varepsilon\beta\pi\delta}\partial R_{\alpha\nu\sigma\rho}} R_{\varepsilon\beta\pi\delta;\tau\gamma} + \right. \\ \left. + \frac{\partial f}{\partial R_{\omega\zeta\vartheta\psi}\partial R_{\varepsilon\beta\pi\delta}\partial R_{\alpha\nu\sigma\rho}} R_{\omega\zeta\vartheta\psi;\gamma} R_{\varepsilon\beta\pi\delta;\tau}\right)\times \\ \times g_{\alpha\mu}\Delta^{\mu\tau\gamma}_{\nu\sigma\rho(\lambda\chi)} - \\ - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial R_{\alpha\nu\sigma\rho}}\left(g_{\alpha\lambda}R_{\chi\nu\sigma\rho} + g_{\alpha\chi}R_{\lambda\nu\sigma\rho}\right) - \\ - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial E^{\alpha\beta\gamma\delta}}E^{\alpha\beta\gamma\delta}g_{\lambda\chi} + \frac{\partial f}{\partial g^{\lambda\chi}} - \frac{1}{2} f\, g_{\lambda\chi}\end{gathered}\,, \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\Delta^{\mu\tau\gamma}_{\nu\sigma\rho(\lambda\chi)} = \frac{1}{2} g^{\mu\eta}\left(\delta^{\vartheta}_{\sigma}\delta^{\tau}_{\rho} - \delta^{\vartheta}_{\rho}\delta^{\tau}_{\sigma}\right)\times \\ \times\left(\delta^{\alpha}_{\eta}\delta^{\beta}_{\nu}\delta^{\gamma}_{\vartheta} + \delta^{\alpha}_{\eta}\delta^{\beta}_{\vartheta}\delta^{\gamma}_{\nu} - \delta^{\alpha}_{\nu}\delta^{\beta}_{\vartheta}\delta^{\gamma}_{\eta}\right)\times. \\ \times\left(g_{\alpha\lambda}g_{\beta\chi} + g_{\alpha\chi}g_{\beta\lambda}\right)\end{gathered} \tag{6}$$

Выражение (4) более компактно чем (5), но при этом в (5) ковариантные производные от тензора Римана выражены явно, а на лагранжевую плотность действуют только «частные производные» по составляющим их компонентам.

Из (4), (5) легко видеть, что если лагранжевая плотность f есть сумма, то каждый элемент этой суммы даст отдельное слагаемое в результирующем гравитационном уравнении.

Также стоит уточнить понятие «частная производная» по составляющему компоненту. В (4) и (5) мы можем видеть такие «частные производные»

$$\begin{gathered}\frac{\partial f}{\partial R_{\omega\zeta\vartheta\psi}\partial R_{\varepsilon\beta\pi\delta}\partial R_{\alpha\nu\sigma\rho}}\,, \\ \frac{\partial f}{\partial R_{\varepsilon\beta\pi\delta}\partial R_{\alpha\nu\sigma\rho}}\,, \frac{\partial f}{\partial R_{\alpha\nu\sigma\rho}}\,,. \\ \frac{\partial f}{\partial E^{\alpha\beta\gamma\delta}}\,, \frac{\partial f}{\partial g^{\lambda\chi}}\end{gathered} \tag{7}$$

Они возникли в процессе вариации гравитационного действия (1). Действительно, несложно видеть что они возникают сразу же после действия вариации на плотность лагранжа f

$$\begin{gathered}\delta f = \frac{\partial f}{\partial R_{\alpha\nu\sigma\rho}}\delta R_{\alpha\nu\sigma\rho} + \frac{\partial f}{\partial E^{\alpha\beta\gamma\delta}}\delta E^{\alpha\beta\gamma\delta} + \\ + \frac{\partial f}{\partial g^{\lambda\chi}}\delta g^{\lambda\chi}\end{gathered} \tag{8}$$

Берутся такие «производные» подобно координатным частным производным. Все «частные производные» (7) являются тензорами. При вычислении любой «частной производной» из (7) мы получим тензор с набором говорящих индексов таких же, как и у тензоров по которым бралась «производная». Так же стоит оговорить симметрию этих индексов: любая «частная производная» из (7) почти всегда умножается на тензорную структуру, которая имеет такую же симметрию индексов как и индексы тензоров по которым берётся «производная» (к примеру (8)), поэтому обычно проблема сохранения симметрии/антисимметрии не должна возникать. Но всё же для большей корректности после получения «частных производных» (7) необходимо учесть что результирующие индексы должны быть в последствии симметрированы/антисимметрированы в соответствии с индексами тензоров по которым бралась «производная». Для того, что бы показать что мы это учли, будем брать эти индексы в скобки, круглые для $\partial f/\partial g^{\lambda\chi}$, квадратные для $\partial f/\partial E^{\alpha\beta\gamma\delta}$, фигурные для $\partial f/\partial R_{\alpha\nu\sigma\rho}$ (это в том случае если полученное выражение не обладает необходимыми свойствами симметрии). К примеру

$$\frac{\partial f}{\partial g^{\lambda\chi}} = A_{(\lambda\chi)}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial R_{\alpha\nu\sigma\rho}} = A^{\{\alpha\nu\sigma\rho\}}. \qquad (9)$$

Фактически под скобками мы подразумеваем, что к полученному тензору применена необходимая операция симметризации/антисимметризации. Проанализировав ур. (4), (5) можно сделать вывод что на практике непосредственно симметризовать/антисеммитризовать имеет смысл только выражение $\partial f/\partial g^{\lambda\chi}$ поскольку уравнение (2) симметрично по $\lambda\chi$. (Все сделанные замечания по поводу необходимости учёта симметрии/антисимметрии логически следуют из ур.(8) которое появляется при вариации действия в самом начале и на котором основаны все дальнейшие преобразования вплоть до получения (4), (5). Действительно, из (8) видно, что та часть «частной производной» по составному компоненту которая не отвечает симметрии тензора на который она умножается, просто аннулируется.)

А теперь рассмотрим конкретные частные случаи гравитационных моделей и получим для них уравнения поля с помощью обсуждаемого обобщения.

КВАДРАТИЧНАЯ МОДЕЛЬ

Одной из наиболее распространенных моделей гравитации высших степеней кривизны является квадратичная гравитация [9]-[16]. В общем случае для этой модели действие представляет собой

$$S_g = \int\left(R + nR^2 + pR_{\mu\nu}R^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}d^4x \qquad (10)$$

где n,p – некие коэффициенты. Хотя вариант (10) не является единственным. Согласно теореме Гаусса-Бонне [17]-[19] в 4-мерном пространстве справедливо тождество

$$\begin{gathered}\delta\int\left(R_{\mu\nu\lambda\chi}R^{\mu\nu\lambda\chi} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2\right)\times \\ \times\sqrt{-g}\,d^4x \equiv 0\end{gathered}. \qquad (11)$$

От сюда следует, что одна из трёх квадратичных моделей

$$R^2,\ R_{\mu\nu}R^{\mu\nu},\ R_{\mu\nu\lambda\chi}R^{\mu\nu\lambda\chi} \qquad (12)$$

выражается через две другие. Тоесть в интеграле действия (10) в качестве квадратичных скаляров можно использовать любые два из (12), но вариант (10) используется наиболее чаще. По этому мы рассмотрим именно его.

Построим уравнения гравитационного поля, используя (1)-(6). Удобно рассматривать входящие в f слагаемые по отдельности. Итак, в данном случае

$$\begin{gathered}f = f_1 + nf_2 + pf_3\ , \\ f_1 = R\ ,\ f_2 = R^2,\ f_3 = R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}.\end{gathered} \qquad (13)$$

f_1 даёт тензор Эйнштейна

$$f_1 \to G_{\lambda\chi} = R_{\lambda\chi} - \frac{1}{2}Rg_{\lambda\chi}. \qquad (14)$$

Для f_2 имеем

$$\begin{gathered}\frac{\partial f_2}{\partial E^{\alpha\beta\gamma\delta}} \equiv 0, \frac{\partial f_2}{\partial R_{\alpha\nu\sigma\rho}} = 2R\,g^{\{\alpha\sigma}g^{\nu\rho\}}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial g^{\lambda\chi}} = 4R_{\lambda\chi}R.\end{gathered} \qquad (15)$$

В случае квадратичной гравитации, явно выраженные производные от тензора Римана появятся даже в (4), то есть впринципе (4) и (5) дадут выражение одного и того же вида, поэтому будем использовать (4). Подставляя (15) в (4) получим после определённых преобразований вклад в гравитационное уравнение слагаемого f_2

$$\begin{gathered}f_2 \to B_{\lambda\chi} = 2\Big[R_{;\tau\gamma}\left(g^{\tau\gamma}g_{\lambda\chi} - \delta^\tau_\lambda\delta^\gamma_\chi\right) + \\ + RR_{\lambda\chi} - \frac{1}{4}R^2g_{\lambda\chi}\Big]\end{gathered}. \qquad (16)$$

Для f_3 имеем

$$\frac{\partial f_3}{\partial E^{\alpha\beta\gamma\delta}} \equiv 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial R_{\alpha\nu\sigma\rho}} = 2R^{\{\nu\rho}g^{\alpha\sigma\}},$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial g^{\lambda\chi}} = 2R^{\beta\delta}R_{\lambda\beta\chi\delta} + 2R_{\lambda\rho}R^{\rho}_{\chi}. \qquad (17)$$

И соответствующий вклад в уравнение поля

$$f_3 \to C_{\lambda\chi} = R_{\lambda\chi;\tau\gamma}g^{\tau\gamma} + \frac{1}{2}R_{;\tau\gamma}g^{\tau\gamma}g_{\lambda\chi} + +2R^{\gamma\beta}R_{\lambda\gamma\chi\beta} - R_{;\lambda\chi} - \frac{1}{2}R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}g_{\lambda\chi}. \qquad (18)$$

А полное гравитационное уравнение для квадратичного действия (10) есть

$$G_{\lambda\chi} + nB_{\lambda\chi} + pC_{\lambda\chi} = \frac{8\pi k_g}{c^4}T_{\lambda\chi}, \qquad (19)$$

или

$$R_{\lambda\chi} - \frac{1}{2}Rg_{\lambda\chi} + 2n\left(R_{;\tau\gamma}\left(g^{\tau\gamma}g_{\lambda\chi} - \delta^{\tau}_{\lambda}\delta^{\gamma}_{\chi}\right) + RR_{\lambda\chi} - \frac{1}{4}R^2 g_{\lambda\chi}\right) + p\left(R_{\lambda\chi;\tau\gamma}g^{\tau\gamma} + \frac{1}{2}R_{;\tau\gamma}g^{\tau\gamma}g_{\lambda\chi} + 2R^{\gamma\beta}R_{\lambda\gamma\chi\beta} - R_{;\lambda\chi} - \frac{1}{2}R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}g_{\lambda\chi}\right) = \frac{8\pi k_g}{c^4}T_{\lambda\chi} \qquad (20)$$

Несложно показать, что ограничивающее условие (3) которым является равенство нулю 4-дивергенции левой части гравитационного уравнения выполняется для $G_{\lambda\chi}$, $B_{\lambda\chi}$ и $C_{\lambda\chi}$. Ур. (20) эквивалентно уравнению, использующемуся во многих работах по нелинейной гравитации [9]-[16].

МОДЕЛЬ *f(R)*

Другой весьма распространённой моделью является гравитация типа *f(R)* [20,21].Согласно этой модели действие представляет собой

$$S_g = \int f(R)\sqrt{-g}\,d^4x \qquad (21)$$

где *f(R)* – произвольная скалярная функция, зависящая только от скалярной кривизны R. Уравнения гравитационного поля для этого действия также не сложно построить с помощью (1)-(6). Итак имеем

$$\frac{\partial f(R)}{\partial R_{\omega\zeta\vartheta\psi}\partial R_{\varepsilon\beta\pi\delta}\partial R_{\alpha\nu\sigma\rho}} = f'''(R)g^{\{\omega\vartheta}g^{\zeta\psi}g^{\varepsilon\pi}g^{\beta\delta}g^{\alpha\sigma}g^{\nu\rho\}},$$

$$\frac{\partial f(R)}{\partial R_{\varepsilon\beta\pi\delta}\partial R_{\alpha\nu\sigma\rho}} = f''(R)g^{\{\varepsilon\pi}g^{\beta\delta}g^{\alpha\sigma}g^{\nu\rho\}}, \qquad (22)$$

$$\frac{\partial f(R)}{\partial R_{\alpha\nu\sigma\rho}} = f'(R)g^{\{\alpha\sigma}g^{\nu\rho\}},$$

$$\frac{\partial f(R)}{\partial g^{\lambda\chi}} = 2f'(R)R_{\lambda\chi}, \quad \frac{\partial f(R)}{\partial E^{\alpha\beta\gamma\delta}} \equiv 0. \qquad (23)$$

где штрих это производная по *R*.

Подставляя (22) и (23) в (5) получим после некоторых преобразований уравнения гравитационного поля для модели *f(R)*

$$\left(f'''(R)R_{,\gamma}R_{,\tau} + f''(R)R_{;\tau\gamma}\right)\left(g^{\tau\gamma}g_{\lambda\chi} - \delta^{\tau}_{\lambda}\delta^{\gamma}_{\chi}\right) + f'(R)R_{\lambda\chi} - \frac{1}{2}f(R)g_{\lambda\chi} = \frac{8\pi k_g}{c^4}T_{\lambda\chi}, \qquad (24)$$

либо более компактный вариант с использованием (4)

$$f'(R)_{;\tau\gamma}g^{\gamma\tau}g_{\lambda\chi} - f'(R)_{;\lambda\chi} + f'(R)R_{\lambda\chi} - \frac{1}{2}f(R)g_{\lambda\chi} = \frac{8\pi k_g}{c^4}T_{\lambda\chi} \qquad (25)$$

Легко показать, что для полученных уравнений условие (3) выполняется.

Ур. (24), (25) эквивалентны уравнениям, полученным в [20,21], также можно встретить вариант уравнения (24) в форме $f(R) = \sum_n a_n R^n$ [22,23].

МОДЕЛЬ $f\left(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}\right)$

Ещё одна часто встречающаяся модель гравитации [24] основана на действии вида

$$S_g = \int f\left(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}\right)\sqrt{-g}\,d^4x. \qquad (26)$$

Получить уравнения поля для этого действия с помощью (1)-(6) не составит труда. Представим плотность лагранжа f как

$$f = f\left(R, P, Q\right), P = R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}, \quad Q = R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{27}$$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial g^{\lambda\chi}} = 2 f_{,R} R_{\lambda\chi} + 2 f_{,P}\left(R^{\beta\delta} R_{\lambda\beta\chi\delta} + R_{\lambda\rho} R_{\chi}^{\rho}\right) + 4 f_{,Q} R_{\lambda\beta\gamma\delta} R_{\chi}^{\beta\gamma\delta}, \quad \frac{\partial f}{\partial E^{\alpha\beta\gamma\delta}} \equiv 0, \tag{28}$$

$$\frac{\partial f}{\partial R_{\alpha\nu\sigma\rho}} = f_{,R} g^{\{\alpha\sigma} g^{\nu\rho\}} + 2 f_{,P} R^{\{\alpha\sigma} g^{\nu\rho\}} + 2 f_{,Q} R^{\alpha\nu\sigma\rho}, \tag{29}$$

где

$$f_{,R} = \frac{\partial f}{\partial R}, \; f_{,P} = \frac{\partial f}{\partial P}, \; f_{,Q} = \frac{\partial f}{\partial Q}. \tag{30}$$

Подставляя (28),(29) в (4) получим после определённых преобразований

$$\begin{gathered}\left(f_{,R}\right)_{;\tau\gamma} g^{\gamma\tau} g_{\lambda\chi} - \left(f_{,R}\right)_{;\lambda\chi} + \\ + \left(\left(f_{,P}\right)\left(g^{\gamma\tau} R_{\lambda\chi} - 2R_{(\lambda}^{(\tau} \delta_{\chi)}^{\gamma)} + R^{\gamma\tau} g_{\lambda\chi}\right)\right)_{;\tau\gamma} - \\ - 4\left(f_{,Q} R^{\tau}{}_{(\lambda\chi)}{}^{\gamma}\right)_{;\tau\gamma} + f_{,R} R_{\lambda\chi} + 2 f_{,P} R^{\beta\delta} R_{\lambda\beta\chi\delta} + \\ + 2 f_{,Q} R_{\lambda}{}^{\nu\sigma\rho} R_{\chi\nu\sigma\rho} - \frac{1}{2} f\, g_{\lambda\chi} = \frac{8\pi k_g}{c^4} T_{\lambda\chi}\end{gathered} \tag{31}$$

Можно показать, что левая часть (31) удовлетворяет условию (3).

Уравнения (31) эквивалентно уравнению полученному в [24] .

РАСШИРЕННЫЕ МОДЕЛИ ГРАВИТАЦИИ

Теперь построим несколько новых моделей гравитации не рассматриваемых ранее. Отметим, что предложенные гравитационные модели могут сыграть большую роль как при квантовании гравитационного поля, так и при рассмотрении эффектов связанными с взаимодействием гравитационного поля с другими полями, в частности с фермионным и появления при этом динамической генерации фермионной массы [25]. Остановимся на гравитационных действиях, в которых плотность лагранжа есть скаляр третьей степени кривизны.

<u>Модель</u> $R_{\beta}^{\alpha} R_{\gamma}^{\beta} R_{\alpha}^{\gamma}$.

$$S = \int R_{\beta}^{\alpha} R_{\gamma}^{\beta} R_{\alpha}^{\gamma} \sqrt{-g}\, d^4 x. \tag{32}$$

$$\frac{\partial f}{\partial R_{\alpha\nu\sigma\rho}} = 3 R_{\eta}^{\{\alpha} R^{\sigma\eta} g^{\nu\rho\}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial g^{\lambda\chi}} = 3 R_{\lambda}^{\alpha} R_{\chi}^{\beta} R_{\alpha\beta} + 3 R_{\beta}^{\alpha} R_{\gamma}^{\beta} R_{\lambda\alpha\chi}^{\gamma},$$

$$\frac{\partial f}{\partial E^{\alpha\beta\gamma\delta}} \equiv 0. \tag{33}$$

Подставив (33) в (4),(2) получим уравнение гравитационного поля для модели (32)

$$\begin{gathered}\frac{3}{2}\left(\left(R_{\lambda\varepsilon} R_{\chi}^{\varepsilon}\right)_{;\tau\gamma} g^{\tau\gamma} - \left(R_{\lambda\varepsilon} R^{\tau\varepsilon}\right)_{;\tau\chi} + \right. \\ \left. + \left(R_{\chi\varepsilon} R^{\tau\varepsilon}\right)_{;\tau\lambda} + \left(R_{\varepsilon}^{\gamma} R^{\tau\varepsilon}\right)_{;\tau\gamma} g_{\lambda\chi}\right) + \\ + 3 R_{\beta}^{\alpha} R_{\gamma}^{\beta} R_{\lambda\alpha\chi}^{\gamma} - \frac{1}{2} R_{\beta}^{\alpha} R_{\gamma}^{\beta} R_{\alpha}^{\gamma} g_{\lambda\chi} = \\ = \frac{8\pi k_g}{c^4} T_{\lambda\chi}\end{gathered} \tag{34}$$

<u>Модель</u> $R_{\alpha\beta} R_{\gamma\delta} R^{\alpha\gamma\beta\delta}$.

$$S = \int R_{\alpha\beta} R_{\gamma\delta} R^{\alpha\gamma\beta\delta} \sqrt{-g}\, d^4 x. \tag{35}$$

$$\frac{\partial f}{\partial g^{\lambda\chi}} = 2 R_{\lambda\alpha\chi\beta} R_{\gamma\delta} R^{\alpha\gamma\beta\delta} + 4 R_{(\lambda}^{\beta} R^{\gamma\delta} R_{\chi)\gamma\beta\delta}, \tag{36}$$

$$\frac{\partial f}{\partial E^{\alpha\beta\gamma\delta}} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial R_{\alpha\nu\sigma\rho}} = 2 R_{\gamma\delta} R^{\alpha\gamma\sigma\delta} g^{\nu\rho} + R^{\alpha\sigma} R^{\nu\rho}. \tag{37}$$

Подставим (36),(37) в (4),(2) получим уравнение гравитационного поля для модели (35)

$$\begin{gathered}\left(R_{\lambda\chi} R^{\tau\gamma} - R_{(\lambda}^{\tau} R_{\chi)}^{\gamma} + R^{\zeta\delta} R_{\lambda\zeta\chi\delta} g^{\gamma\tau} - \right. \\ \left. - 2 R_{\delta}^{\zeta} R_{(\lambda\zeta}{}^{\tau\delta} \delta_{\chi)}^{\gamma} + R_{\zeta\delta} R^{\gamma\zeta\tau\delta} g_{\lambda\chi}\right)_{;\tau\gamma} +\end{gathered}$$

$$+2R_{\lambda\alpha\chi\beta}R_{\gamma\delta}R^{\alpha\gamma\beta\delta} -$$
$$-\frac{1}{2}R_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta}R^{\alpha\gamma\beta\delta}g_{\lambda\chi} = \frac{8\pi k_g}{c^4}T_{\lambda\chi} \cdot \qquad (38)$$

Модель $R_{\pi\delta}^{\ \ \alpha\nu}R_{\sigma\rho}^{\ \ \pi\delta}R_{\alpha\nu}^{\ \ \sigma\rho}$

$$S = \int R_{\pi\delta}^{\ \ \alpha\nu}R_{\sigma\rho}^{\ \ \pi\delta}R_{\alpha\nu}^{\ \ \sigma\rho}\sqrt{-g}\, d^4x \qquad (39)$$

$$\frac{\partial f}{\partial R_{\alpha\nu\sigma\rho}} = 3R^{\alpha\nu}_{\ \ \pi\delta}R^{\sigma\rho\pi\delta},$$

$$\frac{\partial f}{\partial g^{\lambda\chi}} = 6R_{\lambda}^{\ \delta\alpha\nu}R_{\chi\delta\sigma\rho}R_{\alpha\nu}^{\ \ \sigma\rho},\ \frac{\partial f}{\partial E^{\alpha\beta\gamma\delta}} \equiv 0 \quad (40)$$

Подставим (40) в (4),(2) и получим уравнение гравитационного поля для модели (39)

$$6\left(R_{(\lambda\ \pi\delta}^{\ \ \gamma}R_{\chi)}^{\ \tau\pi\delta}\right)_{;\tau\gamma} + 3R_{\lambda}^{\ \nu\pi\delta}R^{\sigma\rho}_{\ \ \pi\delta}R_{\chi\nu\sigma\rho} -$$
$$-\frac{1}{2}R_{\pi\delta}^{\ \ \alpha\nu}\partial R_{\sigma\rho}^{\ \ \pi\delta}\partial R_{\alpha\nu}^{\ \ \sigma\rho}g_{\lambda\chi} = \frac{8\pi k_g}{c^4}T_{\lambda\chi} \qquad (41)$$

ВЫВОД

Рассмотрены частные случаи обобщённой модели теории гравитации высших степеней кривизны, получены известные модели гравитации, такие как квадратичная, $f(R)$ и $f\left(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}\right)$ модели,

а так же получены гравитационные уравнения для несколько новых моделей не рассматриваемых ранее. Проведённые вычисления наглядно демонстрируют работоспособность, практичность и удобность представленного обобщения как средства получения уравнения гравитационного поля для любой модели в рамках данной теории.

1. Я.С. Яцків, О. М.Александров, І. Б. Вавилова Загальна Теорія Відносності: випробування часом. - Київ: ГАО НАН України, 2005.
2. M. Kramer, I.H. Stairs Tests of general relativity from timing the double // Science. – 2006. – Vol.314. – P. 97-102.
3. N. Birrell, P. Davies Quantum Fields in Curved Space. - Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1982.
4. J. Polchinski String Theory. - Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. - Vol.1,2.
5. K. Maeda, N. Ohta Inflation from M-Theory with Fourth-order Corrections and Large Extra Dimensions // Phys. Lett. – 2004. – Vol.B597. – P.400.
6. N. Ohta Accelerating Cosmologies from S-Branes // Phys. Rev. Lett. – 2003. – Vol.91. - P.061303.
7. I.L. Buchbinder Quantum Effects in Softly Broken Gauge Theories in Curved Space-Times // Phys.Lett. – 1989. – Vol. B216. – P.127.
8. А.Т. Котвицкий, Д.В. Крючков Обобщённое уравнение гравитации в моделях типа $f(R_{\alpha\beta\gamma\delta})$ // Вестник Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина, серия физическая, «Ядра, частицы, поля». – 2008. - №832, вып. 4(44). – С. 29-33.
9. J. Matyjasek Entropy of nonlinear black holes in quadratic gravity // ActaPhys.Polon. – 2008. – Vol.B39. – P. 3-22.
10. Y. Liu, Y. Sun On the Generalized Massive Gravity in AdS3 // Phys.Rev. – 2009. – Vol.D79. – P.126001.
11. G. J. Olmo, H. Sanchis-Alepuz, S. Tripathi Dynamical Aspects of Generalized Palatini Theories of Gravity // Phys.Rev. – 2009. – Vol.D80. – P.024013.
12. A. V. Toporensky, P.V. Tretyakov De Sitter stability in quadratic gravity // Int.J.Mod.Phys. – 2007. – Vol.D16. – P.10751086.
13. J. D. Barrow, J. Middleton Stable Isotropic Cosmological Singularities in Quadratic Gravity // Phys.Rev. – 2007. – Vol. D75. – P.123515.
14. S. Cotsakis, A. Tsokaros Asymptotics of flat, radiation universes in quadratic gravity // Phys.Lett. – 2007. – Vol. B651. – P.341-344.
15. G. Allemandi, A. Borowiec, M. Francaviglia Accelerated Cosmological Models in Ricci squared Gravity // Phys.Rev. – 2004. – Vol.D70. – P.103503.
16. W. Berej, J. Matyjasek, D. Tryniecki, M. Woronowicz Regular black holes in quadratic gravity // Gen.Rel.Grav. – 2006. – Vol.38. – P.885-906.
17. С.Е Степанов Теорема Гаусса-Бонне // Соросовский Образовательный журнал. – 2000. – №9. - с.116–121.
18. A. Barrau, J. Grain, S. O. Alexeyev Gauss-Bonnet Black Holes at the LHC : Beyond the Dimensionality of Space // Phys. Lett. – 2004. – Vol.B584. – P.114.
19. K. Kleidis, A. Kuiroukidis, D. B. Papadopoulos Interactive Quadratic Gravity // Phys.Lett. – 2002. – Vol.B546. – P.112-118.
20. S.A. Appleby, R.A. Battye Aspects of cosmological expansion in f(R) gravity models // J. Cosmol. Astropart. Phys. – 2008. - Vol.05. – P.019.
21. O. Bertolami, C.G. Boehmer, T. Harko, F. Lobo Extra force in f(R) modified theories of gravity // Phys.Rev. – 2007. – Vol.D75. – P.104016.
22. N. Furey Wormhole throats in Rm gravity // Class.Quant. Grav. – 2005. – Vol.22. – P.313-322.
23. S. Carloni, K. S. Dusby, S. Capozziello, A. Trisi Cosmological dynamics of Rm gravity // Class.Quant.Grav. – 2005. – Vol.22. - P.4839-4868.
24. S. M. Carroll, A.De Felice, V. Duvvuri, D.A. Easson, M. Trodden, M. S. Turner The Cosmology of Generalized Modified Gravity Models // Phys.Rev. – 2005. – Vol.D71. – P.063513.
25. Miransky V.A. Dynamical symmetry breaking in quantum field theories. – Singapore, World Scientific, 1993 – 364 p.